Baire's category Theorem

Question 1. 모든 유리수에서 불연속이고 모든 무리수에서 연속인 함수가 존재하는가?
Question 2. 모든 무리수에서 불연속이고 모든 유리수에서 연속인 함수가 존재하는가?

E가 위상공간 X의 부분집합이라고 하자.

Definition 1. $\overline{E} = X$ 이면, E는 X에서 dense set이라고 한다.

Definition 2. $(\overline{E})^o = \varnothing$ 이면, E는 X에서 nowhere dense set이라고 한다.

Definition 3. E가 countable union of nowhere dense sets으로 표현될 수 있으면, E는 X에서 set of first category라고 한다.

Definition 4. E가 X에서 set of first category가 아니면, E는 X에서 set of second category라고 한다.

Lemma 5. (X, ρ)가 complete metric space이고 $\{E_n\}$이 X에서 dense open set이면, E_n의 교집합 E는 X에서 dense set이다.

proof) $\forall x_0 \in X,\ \forall \epsilon_0 > 0$ 라 하자.

E_1이 X에서 dense set이므로, $x_1 \in E_1 \cap B_{\epsilon_0}(x_0)$가 존재한다.

$E_1 \cap B_\epsilon(x_0)$가 open set이므로, $\exists \epsilon_1 > 0$ such that $B_{\epsilon_1}(x_1) \subset E_1 \cap B_{\epsilon_0}(x_0)$ 이다.

$\delta_1 := \min\left(\frac{\epsilon_1}{2}, 1\right)$ 라 하자. E_2이 X에서 dense set이므로, $x_2 \in E_2 \cap B_{\delta_1}(x_1)$가 존재한다.

$E_2 \cap B_{\delta_1}(x_1)$가 open set이므로, $\exists \epsilon_2 > 0$ such that $B_{\epsilon_2}(x_2) \subset E_2 \cap B_{\delta_1}(x_1)$ 이다.

이러한 과정을 반복하면 임의의 자연수 n에 대하여,

$$B_{\epsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset E_{n+1} \cap B_{\delta_n}(x_n),\ \delta_n := \min\left(\frac{\epsilon_n}{2}, \frac{1}{n}\right)$$

를 만족하는 수열 $\{x_n\}$, $\{\epsilon_n\}$, $\{\delta_n\}$을 얻는다.

$B_{\delta_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\epsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\delta_n}(x_n)$ 이므로, $m > n$에 대하여, $x_m \in B_{\delta_n}(x_n)$ 이다.

$\delta_n \le \frac{1}{n}$ 이므로, $\rho(x_m, x_n) < \frac{1}{n}$ 이다. 즉, $\{x_n\}$는 Cauchy이다.

X가 complete이므로, $\{x_n\}$는 X의 어떤 x에 수렴한다.

임의의 자연수 n에 대하여 $x \in \overline{B_{\delta_n}(x_n)}$, $\delta_n < \epsilon_n$ 이므로, $x \in \overline{B_{\delta_n}(x_n)} \subset B_{\epsilon_n}(x_n) \subseteq E_n$ 이다.

즉, $x \in E$ 이고, $\rho(x, x_0) < \epsilon$ 이므로, $x_0 \in \overline{E}$ 이다. 즉, $\overline{E} = X$ 이다. ∎

Theorem 6. (Baire's category Theorem)
X가 nonempty complete metric space이면, X는 X에서 set of second category이다.
proof) X가 set of first category라 가정하자.
그러면 countable nowhere dense sets $\{E_n\}$가 존재해서 $X = \bigcup E_n$ 를 만족한다.

$\bigcap \left(\overline{E_n}\right)^c = \left(\bigcup \overline{E_n}\right)^c = X^c = \varnothing$

각 n에 대하여, $\left(\overline{E_n}\right)^c$는 X에서 dense open set이므로, Lemma 5에 의해 공집합은 X에서 dense set이다.
이는 모순이므로, X는 X에서 set of second category이다.∎

Lemma 7. $\mathbb{Q}$ is set of first category in usual topological space $\mathbb{R}$.∎

Theorem 8. Complete metric space (X, ρ)의 부분집합 E가 X에서 dense set라고 하자. 만약 $f : X \to \mathbb{R}$가 E에서 연속이면, f는 X의 어떤 set of second category에서 연속이다.
proof) $U(x) := \inf\{\sup\{f(t) \mid t \in B_\epsilon(x)\} \mid \epsilon > 0\}$, $L(x) := \sup\{\inf\{f(t) \mid t \in B_\epsilon(x)\} \mid \epsilon > 0\}$

자연수 n에 대하여, $E_n := \left\{x \in X \mid U(x) - L(x) < \frac{1}{n}\right\}$ 이라 하자.

$\forall x \in E_n$, $\delta(x) := \frac{1}{n} - (U(x) - L(x))$, $\exists \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ such that

$$\sup\left\{f(t) \mid t \in B_{\epsilon_1}(x)\right\} < U(x) + \frac{\delta(x)}{3},\ \inf\left\{f(t) \mid t \in B_{\epsilon_2}(x)\right\} > L(x) - \frac{\delta(x)}{3}$$

$\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$라 하면, $\forall u \in B_{\epsilon/2}(x)$에 대하여 $B_{\epsilon/2}(u) \subset B_\epsilon(x)$이므로,

$$\sup\left\{f(t) \mid t \in B_{\epsilon/2}(u)\right\} < U(x) + \frac{\delta(x)}{3},\ \inf\left\{f(t) \mid t \in B_{\epsilon/2}(u)\right\} > L(x) - \frac{\delta(x)}{3}$$

$U(u) - L(u) \le U(x) - L(x) + \frac{2}{3}\delta(x) < \frac{1}{n}$ 이므로, $u \in E_n$ 이고, 이는 $B_{\epsilon/2}(x) \subset E_n$ 이다.
즉, E_n은 open set 이다.
여기서 f는 dense set E에서 연속이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $E \subseteq E_n$이다.
즉, 모든 자연수 n에 대하여 E_n은 X에서 dense set이다.
즉, $\left((E_n)^c\right)^o = \varnothing$이므로 $\left(\bigcap E_n\right)^c = \bigcup (E_n)^c$는 X에서 set of first category이고, 따라서 Baire's category Theorem에 의해 $\bigcap E_n$는 X에서 set of second category이다.
E_n의 정의에 의해 f는 $\bigcap E_n$에서 연속이다.∎

Corollary 9. 유리수 집합에서만 연속인 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 존재하지 않는다.∎