소수로 이루어진 등차수열

(Primes in arithmetic progression)

2018311095 장민근

이 세미나의 목표

길이가 7~10인 소수로 이루어진 등차수열 구해보기

들어가기에 앞서 알아두면 좋은 상식

1. 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 길이가 n인 소수로 이루어진 등차수열이 존재하는가?

이 문제는 1904년 Dickson에 의해 제기되었으며 100년동안 풀리지 않다가 2004년 Ben Green과 Terence Tao에 의해 풀렸고, 약 2년간의 증명 확인 과정을 거친 뒤 **참**으로 판명났고, 2006년에 Terence Tao는 이 공로로 필즈상을 수상함

(재밌는 사실은 이 때 푸엥카레 추측 해결의 공로로 Terence Tao와 함께 수상 대상자였던 Grigori Perelman(그리고리 페렐만)은 수상을 거부함)

그리고 이 정리의 이름은 Green-Tao theorem이라고 명명됨.

2. 문제가 해결되었긴 하였지만, Ben Green과 Terence Tao는 어떻게 구할 수 있는지에 대한 방법은 제시하지 못하고, 존재성만 증명.(컴퓨터를 통해 길이가 27인 수열 발견-2019년도, 이 수열의 마지막 숫자 : 696112717486210091≈$6.9 \cdot 10^{17}$)

3. Ben Green과 Terence Tao는 조화해석학을 전공한 수학자들이며 해석학적 도구를 이용해 정수론의 미해결 난제를 해결. 수학에서 서로 다른 분야들과의 교류의 필요성을 제시한 것에 의의를 가짐.

1.세메레디의 정리

A가 자연수집합(N)의 부분집합이고, $\frac{|A \cap \{1,2,\ldots,n\}|}{n} > 0$ 이면, A는 임의로 긴 길이의 등차수열을 포함한다.(즉, 임의의 k가 주어졌을 때, 길이가 k인 등차수열이 A안에 존재)

2. 소수정리

x 이하의 소수의 개수를 $\pi(x)$라고 했을 때, $\frac{\pi(x)ln(x))}{x}$ = 1

즉 충분히 큰 x에 대해 $\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{ln(x))}$ 에 근사함.

소수정리가 의미하는 바는 A가 소수들의 집합이라고 할 때, $\frac{|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|}{n} = 0$ 이라는 것을 의미함. 즉, 세메레디 정리는 Green-Tao 정리를 포함하지 못함. green과 Tao는 밀도가 0인 경우에도 임의의 길이를 가진 등차수열이 존재할 수 있다는 것을 증명.

Theorem 1

길이가 3이상인 소수로 이루어진 등차수열의 초항이 2일수는 없다.

Proof

2를 제외한 모든 소수는 홀수.

따라서 초항이 2일 때 공차는 홀수여야 함. 이렇게 되면, 3번째 항은 홀수+공차(홀수)가 되어 짝수가 되므로 소수가 될 수 없음. -> 2는 초항이 될 수 없음.■

Theorem 2

길이가 n인 소수로 이루어진 등차수열의 초항은 n이상인 소수이다.

Proof

초항 q가 n보다 작다고 하고 d가 이 등차수열의 공차라고 하자. 즉,

q, q+d, q+2d, … ,q+qd, …, q+(n-1)d 는 길이가 n인 소수로 이루어진 등차수열이다. 여기서 q+qd=q(1+d)이기 때문에 소수가 될 수 없다. 따라서 모순. 즉 초항은 n이상의 소수이다.■

Theorem 3

길이가 n이고 공차가 d인 소수로 이루어진 등차수열이 있을 때, 이 공차 d는 n보다 작은 모든 소수로 나누어진다.

Proof

a, a+d, a+2d, … , a+(n-1)d 가 소수로 이루어진 등차수열이라고 하자.

그리고 p를 d를 나눌 수 없는 n보다 작은 소수라고 하자.

그러면 모순이 발생함.

{d, 2d, 3d, …, p*d} = {0,1,2,3,…p-1} in Z_p

{a+d, a+2d, … ,a+pd} = {0,1,2,3,…,p-1} in Z_p

즉 앞의 p개의 항 중에 어느 한 개는 p의 배수가 됨 -> 가능한 경우는 이 어느 한 개가 p가 되는 경우밖에 없음.

그러나 Theorem 2에 의해 초항 a는 n이상이므로 모든 항은 n이상임. -> p가 될 수 없음.(p는 n보다 작음) 모순.

따라서 공차 d는 n보다 작은 모든 소수로 나뉘어짐. ■

이를 활용하여 길이가 6인 수열의 최소 공차를 구해보자.

초항 : 6 이상의 소수

6보다 작은 소수 : 2, 3, 5

최소 공차 : 30(=2*3*5)

길이가 6인 소수로 이루어진 등차수열을 찾아보자.

처음 초항을 7로 잡았을 때

7, 37, 67, 97, 127, 157 -> 소수로 이루어진 공차가 30이고 길이가 6인 등차수열 찾음.

길이가 7인 등차수열도 찾아보자

똑같이 공차가 30인 등차수열이 존재? no

why?

7, 37, 67, 97, 127, 157, 187(=11*17) -> 불가능 즉, 초항은 7일 때 공차가 30일 수는 없음.

{7, 7+d, 7+2d, ... ,7+6*d} = {0,1,2,3,4,5,6} in Z_7 이 되는데, 초항이 7이 아닌 다른 소수 p라고 하면,

p ≠ 0 (mod 7) 이므로 p+kd(k=1,2,...,6) 중에 하나는 0(mod7)이 됨. -> 7의 배수가 되므로 모순.

따라서 공차가 7의 배수가 아니라면 초항은 7일 수밖에 없음.

공차가 7의 배수가 아니라면 가능한 공차들은 30, 60, 90, 120, 150, 180 임.

이 때 7을 초항으로 놓고 가능한 것들을 살펴보면

7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 이 가능함을 알 수 있음 (길이가 7인 소수로 이루어진 수열)

이제 길이가 8 이상인 수열들을 살펴보자.

길이가 8일 때,

길이가 8이므로 공차는 2,3,5,7의 배수여야 함. 즉, 최소 공차는 210임.

그리고 초항은 8 이상인 소수이므로 11, 13, 17, 19, ... 가 가능함.

공차가 210인 길이가 8인 등차수열을 더 쉽게 찾으려면, 큰 수부터 빼는 방법으로 찾는 것이 쉬움(숫자의 크기가 커질수록 소수가 더 적게 등장하기 때문)

210을 7번은 더해야 하기 때문에, 1470 ± 100 근처의 소수들을 찾아보자

1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310
1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320
1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330
1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340
1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350
1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360
1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370
1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380
1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390
1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400

1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410
1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420
1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430
1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440
1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450
1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460
1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470
1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480
1481	1482	1483	1484	1485	1486	1487	1488	1489	1490
1491	1492	1493	1494	1495	1496	1497	1498	1499	1500

1501	1502	1503	1504	1505	1506	1507	1508	1509	1510
1511	1512	1513	1514	1515	1516	1517	1518	1519	1520
1521	1522	1523	1524	1525	1526	1527	1528	1529	1530
1531	1532	1533	1534	1535	1536	1537	1538	1539	1540
1541	1542	1543	1544	1545	1546	1547	1548	1549	1550
1551	1552	1553	1554	1555	1556	1557	1558	1559	1560
1561	1562	1563	1564	1565	1566	1567	1568	1569	1570
1571	1572	1573	1574	1575	1576	1577	1578	1579	1580
1581	1582	1583	1584	1585	1586	1587	1588	1589	1590
1591	1592	1593	1594	1595	1596	1597	1598	1599	1600

들이 있다는 것을 확인할 수 있다.

이를 통해 210을 빼 나가면서 가능한 수들을 찾아보면 결국 1459만 될 수 있음을 확인할 수 있다.

최종 수열

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669

그런데,

1669에 210을 더한 1879

420을 더한 2089 도 소수이다.

즉 우리는

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 라는 길이 10짜리 등차수열을 얻을 수 있다.

■

길이가 11인 등차수열은 공차가 11로 나누어지지 않는다면 초항이 11이어야 하지만

공차가 210, 420, ... 2100 일 때 모두 불가능하다는 것을 알 수 있다.(컴퓨터 계산)

따라서 길이가 11인 소수를 찾으려면 적어도 공차가 2310 이상이다.

컴퓨터를 이용하여 한 번 각자 구해보시면 좋을 것 같습니다.

소수 등차수열 찾는 파이썬 코드 :

```
def isprime(a):
    k = int(a**(1/2))
    for i in range (2,k+1):
        if a % i == 0:
            return False
    return True

print(isprime(5))

n =int(input ("찾으려는 소수 등차수열의 길이를 입력하세요:"))
primelist = []
seqlist = []
ctr=0
d = 1
for i in range (2,n):
    if isprime(i)==True:
        primelist.append(i)




for j in primelist:
    d = d*j
```

```
print("길이가 {n}짜리 소수 등차수열:".format(n=n))

for l in range (1,n):
    for p in range (200000):
        for k in range (n):
            if isprime(p+k*l*d) ==True:
                seqlist.append(p+k*l*d)

        if len(seqlist)==n:
            print(seqlist,end="")
            print("공차:", l*d)
            seqlist=[]
            ctr+=1
        else :
            seqlist = []

if isprime(n)==True and ctr == 0:
    d = d*n
    for l in range (1,n):
        for p in range (200000):
            for k in range (n):
                if isprime(p+k*l*d) ==True:
                    seqlist.append(p+k*l*d)
```

```
        if len(seqlist)==n:
            print(seqlist,end="")
            print("공차:", l*d)
            seqlist=[]
            ctr+=1

        else :
            seqlist = []

if ctr == 0:
    print("발견하지 못했습니다.")
```