괴델의 불완전성 정리

Gödel's Incompleteness Theorems

수학과 19학번 이호준

2022년 4월 19일

초록

힐베르트Hilbert가 1900년에 세계수학자대회에서 산술계의 완전성을 20세기에 해결해야할 문제로 제시하였다. 괴델Gödel은 참이지만 증명 불가능한 문장을 만들어 산술계가 불완전하다는 것을 증명하였다. 네이글 교수님과 뉴먼 교수님이 쓰신 『괴델의 증명』을 기반으로 본문에서는 참이지만 증명 불가능한 문장을 괴델 수를 통해 산술계의 문제로 환원하는 방법으로 괴델의 증명을 다룬다.

목차

1. 소개

괴델의 불완전성 정리가 나온 배경에 대해서 모른다면 그 진정한 의미와 의의를 파악하는데 아쉬움이 있을 것이다. 이번 장에서는 괴델의 불완전성 정리가 나온 역사적 배경과 괴델의 불완전성 정리의 의의를 소개하려고 한다. 먼저 괴델의 불완전성 정리부터 알고 가보자.

제 1 불완전성 정리
페아노 공리계를 포함하는 공리계는 불완전하다
즉, 공리계 안에 참이지만 증명불가능한 명제가 존재한다

제 2 불완전성 정리
페아노 공리계를 포함하는 공리계는 그 공리계가 무모순하다는 것을 그 공리계 안에서 증명할 수 없다

처음 듣는 독자라면 이 정리의 내용을 바로 이해하기 힘들 것이다. 그러나 이 본문을 한 줄 한 줄 읽으며 마지막 장에서 다시 이 정리를 보는 순간에는 엄청난 지적자극과 괴델에 대한 경외감을 느끼게 될 것이다.

수학은 고대 이집트 문명에서 도구로써 발전하였다. 수학을 아는 자는 곧 권력을 얻게 되었고 수많은 공식들은 귀납적으로 받아드려지며 하나의 요리 레시피처럼 내려져왔다. 고대 이집트에서 발전된 수학은 기하였다. 그 이유는 빈번한 나일강 범람으로 인해 본인이 소유한 토지 면적을 알고 있어야 제대로 된 사후처리가 되었기 때문이다. 재산을 지키기 위해 수학이 필요했던 것이다. 그러나 이는 학문으로써의 수학이라 할 수는 없다. 그 이유는 수학이 매우 경험적이었으며 엄밀성이 부족하였다.

학문으로써의 수학은 유클리드로부터 시작했다고 할 수 있다. 유클리드는 원론이라는 책을 쓰며 공리계를 구성했다. 본격적인 연역적 추론 형식의 수학의 시작인 것이다. 유클리드는 5개의 공준[1]을 채택하여 기하학을 구성하였다. 수학에 관심 있는 독자라면 5개의 공준 중 단연 5번째 공준인 평행선 공준을 알고 있을 것이다. 평행선 공준은 다음과 같다

1) 공준은 특정 분야에만 한정된 공리를 뜻하는 말로 공리와 같은 말이라고 봐도 여기서는 무방하다 공리는 증명 없이 참이라고 가정하는 명제이다.

평행선 공준

한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점이 있을 때 그 점을 지나고 주어진 직선과 평행한 직선은 하나뿐이다.

이 평행선 공준은 다른 공준들과 다르게 공준이라기에는 불안한 느낌이 있다. 다른 공준인 “모든 직각은 같다.”를 보면 당연한 것 같지만 평행선 공준은 당연한 느낌이 들지 않는다. 실제로 유클리드도 이 평행선 공준을 쓰지 않을 수 있으면 최대한 쓰지 않으려고 하였다.

이런 평행선 공준에 대한 의심은 2000년 동안 지속이 되었다. 많은 수학자들이 평행선 공준이 공준이 아님을 밝히려고 노력하였지만 돌아오는 건 좌절이었다. 이는 보여이 부자의 대화에서도 발견할 수 있다.

헝가리 수학자인 보여이 퍼르커시와 보여이 야노시는 부자관계이다. 아버지 보여이 퍼르커시는 젊었을 시절 평행선 공준에 도전했다가 큰 좌절을 맛 본 경험을 가지고 있다. 그러나 그의 아들인 보여이 야노시가 본인과 비슷한 나이 때 똑같이 평행선 공준에 도전하려는 것을 보고 편지를 보낸다. “아들아, 나는 이런 연구가 어떻게 끝나는지 잘 안다. 이 문제에 빠져 보낸 심연의 밤들은 내 삶에서 기쁨과 빛을 앗아갔지. 그 심연의 끝은 인간이 다가갈 수 있는 곳이 아니란다. 나와 같은 실수는 하지 말아다오.” 그러나 아들 야노시는 말을 듣지 않고 계속 평행선 공준에 부딪쳤다. 아버지는 다시 한 번 편지를 보냈다. “제발 그만 좀 멈춰다오. 그 연구는 퇴폐적인 욕망 같은 거야. 너의 모든 시간을 잡아먹고 행복, 건강, 평안을 다 앗아갈 거야.” 그러자 아들은 답장을 썼다. “아버지, 저는 이 연구를 계속하기로 결심하였습니다.” 그리고 그는 21살이 되던 해에 또다시 아버지께 답장을 보낸다. “아버지, 저는 아무것도 없는 곳에서 신기하고 새로운 우주strange new universe를 만들어 내었습니다.” 그가 만들어 낸 신기하고 새로운 우주는 과연 무엇일까? 바로 비유클리드 기하학이다.

정리 1.1

다음은 동치이다

(1) 평행선 공준

(2) 삼각형의 내각의 합은 180°이다.

정리 1.2

평행선 공준은 다른 4개의 공준으로 연역될 수 없다

평행선 공준을 따르는 즉, 삼각형의 내각의 합이 180˚인 공간은 평면 공간을 생각할 수 있다. 그러나 공간이 휘어진다면 더 이상 삼각형의 내각의 합이 180˚가 아니다. 평행선 공준을 과감히 버리고 기존 4개의 공준과 다른 조건의 공준을 합치니 새로운 공간이 나타났다. 구면기하학과 쌍곡기하학이 바로 그것이었다.

새로운 기하학의 등장은 수학계의 큰 혼란을 주었다. 그동안의 모든 수학은 유클리드 공리계를 토대로 쌓아 올린 건물과도 같다. 그러나 그 토대인 유클리드 기하학이 흔들리게 된 것이다. 수학계는 새로운 토대의 필요성을 절실히 느끼고 있었다. 그래서 나온 대안이 산술계였다. 산술계를 토대로 수학을 쌓아보자란 것이다. 그러나 산술계를 토대로 하면 한 가지 문제가 생긴다. 바로 무한이다. 자연수만 봐도 자연수는 무한개이다. 무한이 내재되어있는 산술계 위에 수학을 올려놓기엔 너무나도 불안해보였다. 그 때 나타난 사람이 칸토어이다. 칸토어가 무한을 다룰 수 있게 만들어 준 것이다. 칸토어의 집합론 덕분에 우리는 산술계 위에 수학을 올려놓을 수 있게 되었다. 모든 것이 완벽해보였다. 기하학에서 산술로 너무나도 위대한 이사를 성공적으로 끝마친 듯하였다. 그러나 역설이 튀어나오게 된다.

칸토어의 역설

모든 집합들의 집합은 자신을 포함하는가?

러셀의 역설

자신을 포함하지 않은 집합들의 집합은 자신을 포함하는가?

이는 집합을 막무가내로 남용한 결과였다. 그동안 한 번도 집합을 엄밀히 다루지 않았기 때문이다. 이 역설로 받은 피해는 비단 수학계뿐만이 아니다. 술어 논리학의 대가인 프레게는 칸토어의 집합론에 큰 영감을 얻고 수학을 논리학으로 환원하려는 시도를 하였다. 그는 충분히 만족스러운 결과를 가지고 『산술의 근본법칙 2』라는 책을 집필하여 출판하기 위해 막 인쇄 작업을 하고 있었다. 그 때 러셀이 역설에 대한 내용이 담긴 편지를 프레게한테 보낸다. 프레게는 그 편지를 읽고 그 순간 인쇄를 중지할 수밖에 없었다. 집합론을 논리학으로 환원하려 하였지만 집합론 자체가 흔들리고 있던 것이다. 그의 노력이 물거품이 되는 순간이었다. 수학자들은 집합이 되는 조건부터 다시 연구하기 시작하였고 모든 집합과 같은 개념은 집합의 원소가 되지 못한다는 규칙을 만들어내었다. 또한 유형론을 비롯한 상위수학Meta Mathematics이란 개념을 통해

역설을 피해갔다. 러셀은 프레게의 좌절된 시도를 이어받기로 하였다. 그는 상위수학을 가지고 수학을 다시 논리학으로 환원시키려 하였다. 그는 화이트헤드와 함께 『수학 원리』를 집필함으로써 논리주의를 수학계에 주장하였다. 그리고 러셀은 이 책에 이런 말을 남겼다. "수학의 기초가 논리학이라는 사실은 우리 시대의 최고의 발견이다."

그러나 '무한'을 자주 사용하는 수학에 반해 논리주의에서는 '무한'을 직접 다루지 않는다. 논리주의는 이 무한을 사용하기 위해 '무한의 공리'와 같은 억지로 만든 듯한 공리를 넣기도 하였다. 또한 수학이 논리학이라는 말은 곧 수학적 명제를 논리학으로 환원한 후에 판단해야 한다는 것과 같았다. 우리가 일상적으로 쓰는 '1+1=2'와 같은 수학적 명제도 논리학으로 환원한 후에야 참이란 것을 판단할 수 있다는 것이다. 이에 대해 불만을 품은 한 수학자가 있었으니 바로 네덜란드의 수학자 브라우어르였다. 브라우어르는 논리주의처럼 복잡하게 수학을 접근하지 말고 직관적으로 접근하자고 하였다. 말 그대로 '1+1=2'가 참인 건 직관적으로 당연한 것이기 때문이다. 직관주의의 탄생이었다. 브라우어르는 수학적 인식이란 신이 아니고 인간이 할 수 있는 인식이라고 하였다. 직관주의에서의 가장 핵심적인 주장은 무한에서의 배중률[2] 반대이다. 러셀의 역설 같은 여러 역설들이 발생한 이유는 배중률의 무제한적 사용에 있다는 것이다. 우리는 원주율 π가 무한소수이며 초월수라는 것을 안다. 즉 규칙적이지 않은 수들의 나열이다. 그럼 이 π를 나열하다보면 9가 여러 번 나오는 경우가 있을까? 실제로 9가 6번 연속된 경우가 있다. 소수점 이하 762자리에서 767자리까지 9가 나온다. 그럼 9가 10번 나오는 경우는 있을까? 100번 나오는 경우는 있을까? 둘 다 아직 실례는 찾지 못하여 참이다 거짓이다 할 수 없지만 배중률에 따르면 참이거나 거짓이어야 한다. 참임을 보이기 위해 끝도 없이 계속 계산하고 있어야 하는가? 그렇다고 거짓이라고 하기에는 진짜 9가 100번 나올 수도 있지 않는가. 이런 문제 때문에 직관주의에서는 무한에서의 배중률 사용을 제한한다.

그러나 무한에서의 배중률 사용을 제한한다면 칸토어가 이룩한 집합론을 버려야만 했다. 칸토어의 대각선 법칙[3]만 해도 배중률을 이용한 것 아닌가. 이제 겨우 무한을 다룰 수 있게 되었는데 이를 버려야만 하는가. 당시 최고의 수학자였던 힐베르트는 직관주의에 크게 반대하며 다음과 같은 말을 하였다. "아무도 우리를 칸토어가 만들어낸 낙원에서 쫓아낼 수 없다."[4] 힐베르트는 직관주

---

2) 어떤 명제가 참이거나 거짓 둘 중 하나여야 한다는 법칙
3) 칸토어가 자연수 집합보다 실수 집합의 크기가 크다는 걸 증명할 때 사용한 논법
4) Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können. 「Über das Unendliche」 Mathematische Annalen 95, (1926)

의에 대항하기 위해 형식주의를 주장하였다. 수학은 매우 형식적이어서 아무 의미가 없고 단지 기호들이 규칙을 지키며 나열된 것일 뿐이라는 주장이다. 즉, 공리만 정해주면 그 공리 규칙 안에서 기호들이 나열되어 정리Theorem를 만든다는 것이다. 수학자들이 정리를 찾든 말든 공리가 정해진 순간 그 정리들은 그 공리계 안에 내재되어 있다. 여기서 힐베르트는 한 가지 희망을 품기 시작한다. '완전성[5]과 무모순성[6]을 갖는 공리계가 있지 않을까?' 힐베르트는 그 공리계가 산술계일 것이라 예상하여 이른바 힐베르트 프로그램을 시작한다. 또한 힐베르트는 1900년 프랑스 파리에서 열린 세계 수학자 대회에서 20세기 동안 해결해야할 23가지 문제를 발표한다. 그 중 2번 문제가 바로 '산술의 공리는 무모순인가?'이다. 많은 수학자들은 완전성과 무모순성을 갖는 공리계를 만들기 위해 근 10년 동안 수많은 시도를 한다.

그러던 1931년 오스트리아-헝가리 제국 출신 수학자인 쿠르트 괴델이 「『수학 원리』 및 관련 체계에서 형식적으로 결정될 수 없는 명제에 관하여 1」[7] 라는 제목의 논문을 발표한다. 이 논문에는 수많은 수학자들을 절망에 빠뜨리는 내용이 담겨있었다. 바로 불완전성 정리였다. 그럼 다시 정리 내용을 보자.

제 1 불완전성 정리
페아노 공리계를 포함하는 공리계는 불완전하다
즉, 공리계 안에 참이지만 증명불가능한 명제가 존재한다

제 2 불완전성 정리
페아노 공리계를 포함하는 공리계는 그 공리계가 무모순하다는 것을 그 공리계 안에서 증명할 수 없다

즉 산술계는 불완전하며 산술계가 무모순이라는 것조차 산술계 내에서 증명불가능하다[8]. 힐베르트의 꿈을 처참히 짓밟은 것이다. 괴델의 불완전성 정리는 수학의 토대를 만들고자 노력한 세 학파, 논리주의, 직관주의, 그리고 형식주의 모두에게 후춧가루를 뿌렸다. 그렇게 허무하게 힐베르트 프로그램은 실패로 막을 내렸다. 이제 괴델이 불완전성 정리를 어떻게 유도하고 증명하였는지 그 놀라운 테크닉을 감상해보자

---

5) 공리계 내 모든 명제는 증명 가능하거나 반증 가능해야 한다.
6) 공리계 내 서로 모순인 명제가 존재하지 않는다.
7) 「Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I」
8) 1936년 겐첸은 산술계를 더 확장시킨 ZFC공리계에서 산술계가 무모순임을 보이는데 성공하였다.

2. 러셀의 역설과 상위수학

러셀의 역설

$X = \{x | x \not\in x\}$라 하자
그럼 $X \in X$인가 아니면 $X \not\in X$인가

풀이)
$X \in X$이라 가정하자
그럼 X의 정의에 의해 $X \not\in X$이다. →←

$X \not\in X$이라 가정하자
그럼 X의 정의에 의해 $X \in X$이다. →←

그럼 이 역설은 왜 발생하였는가? 바로 $x \not\in x$라고 정의하는 부분에서 문제가 생긴다. '자기 지시적 문장'이라고도 하는 이 문제는 집합론에서 상당히 큰 문제를 야기하였다. 집합을 다루기 무서워진 것이다. 러셀은 지금껏 집합을 다룰 때 엄밀하게 다루지 않은 부분을 지적하였다. 생각해보자, 집합은 모든 것을 원소로 가질 수 있을까? 그 대상이 뭐든 다 집합으로 만들 수 있을까?

러셀은 이 질문에 아니라고 대답한 것이다. 집합을 이루기 위해서는 일정 규칙을 가지고 만들어야 한다는 것이다. 이를 계층 이론[9]이라고 하는데 크게 3가지 층으로 나눈다. 첫 번째 층은 원소[10]들의 층이고, 두 번째 층은 집합[11]들의 층, 세 번째 층은 모임[12]들의 층이다. 이 계층 이론에 대한 간단한 느낌을 알기 위해서 과일로 예시를 들어보자. 먼저 원소는 과일이라고 생각할 수 있다. 사과, 배, 바나나, 자두 등등이 그것들이다. 그럼 사과는 배의 원소라고 말하면 일상 언어상 어색하다. 또한 빨간 과일, 노란 과일, 둥근 과일 등등을 집합으로 생각해보자. 그럼 바나나와 귤은 노란 과일의 원소가 되고 사과 자두 귤은 둥근 과일의 원소가 된다. 그럼 빨간 과일은 둥근 과일의 원소가 될 수 있을까? 물론 부분집합이나 교집합, 합집합은 생각할 수 있다. 예를 들어 빨간

9) Type theory, 유형론이라고도 한다.
10) Element
11) Set
12) Collection

과일과 둥근 과일의 교집합의 원소로 사과가 있다. 그러나 그 빨간 과일이라는 집합이 어떤 특정한 집합의 원소가 될 수는 없다는 것이다. 비단 모든 빨간 과일이 다 둥근 과일일지라도 빨간 과일은 둥근 과일의 부분집합이 될 뿐 절대로 둥근 과일의 원소가 될 수는 없다. 그럼 모임은 과일가게로 생각할 수 있다. 빨간 과일, 둥근 과일, 노란 과일 등등을 원소로 하는 모임 즉, 과일 가게이다. 과일가게는 빨간 과일 같은 집합을 원소로 할 수 있고 물론 사과, 배 같은 원소도 원소로 가질 수 있다. 그러나 택이네 과일 가게와 숙이네 과일 가게는 서로 포함관계가 있을지 몰라도 원소가 될 수 없다. 택이네 과일 가게의 원소가 숙이네 과일 가게라면, 택이네 과일 가게에서 숙이네 과일 가게를 매물로 내놓았다는 것인데 상식적으로는 받아드리기 힘들지 않은가? 러셀은 이런 계층 이론을 통해 이런 역설을 피해가려고 하였다.

이런 계층 이론을 수학적으로 가공한 것이 바로 상위수학[13]이라는 개념이다. 다음 정의를 보자.

정의 2.1 (수학)

무의미한 기호들의 명확하게 진술된 일련의 규칙을 따르는 나열

정의 2.2 (상위수학)

수학에 관하여 언급하는 언어

예시 2.3 (상위수학에 관한 예시)

1. “2+3=5” $\in$ 수학
2. “‘2+3=5’는 참이다.” $\in$ 상위수학
3. “‘2+3=5’는 산술학적 형식문이다.” $\in$ 상위수학

수학은 의미 없는 기호의 나열로 그 자체로는 아무런 의미가 없고 아무 주장도 하지 않는다. 그러나 우리는 그 기호 나열들이 공통된 부분을 가지고 있다

13) Meta-Mathematics

든지 같은 기호들이 반복되는 형태라든지 같은 진술은 분명 유의미하다. 그 유의미한 진술이 상위수학이다. 예시 2.3에서 ‘2+3=5’는 수학적 진술로 아무런 의미가 없다. 그러나 “‘2+3=5’는 참이다.”와 같이 그 수학적 진술에 대한 유의미한 진술을 할 수 있다. 그런 유의미한 진술들이 바로 상위수학적 진술이라는 것이다. 만약 상위수학과 수학을 구분하지 않는다면 러셀의 역설이 발생한다. 그래서 상위수학과 수학을 구분하는 문장을 구성해야 하는데 그 예시는 다음과 같다.

예시 2.4 (올바른 문장)

1. x=3은 방정식이다. (올바르지 않은 문장)
2. ‘x=3’은 방정식이다. (올바른 문장)

예시 2.4의 1번에서 x=3은 분명 수학적 진술이지만 “‘ ’은 방정식이다.”는 상위수학적 진술이다. 그러나 서로 성질이 다른 두 진술을 구분하지 않고 한 번에 썼다. 이는 명백히 올바르지 않은 문장이다.

그럼 상위수학을 이용하면 어떻게 러셀의 역설을 피할 수 있을까? 러셀의 역설에서 문제된 부분을 다시 언급하자면 $x \not\in x$ 이 부분이다. 이를 일상용어로 비유하자면 다음과 같다. 문장 a: 문장 a는 거짓이다. 이는 올바르지 않은 문장이다. 만약 문장 a가 수학적 진술이라면 ‘~는 거짓이다.’라는 상위 수학적 진술과의 구분이 없기에 올바르지 않는다. 만약 문장 a가 상위 수학적 진술이라면 상위 수학적 진술에 대한 진술이기에 문장 a는 상위상위수학이 된다. 그러나 그런 것은 없다. 상위상위수학을 인정한다면 상위상위상위수학도 인정해야하고 무의미한 형식문과 의미 있는 진술 사이의 경계가 불분명해져서 이 논의 자체가 무의미해진다. 고로 “문장 a: 문장 a는 거짓이다.”는 올바르지 않다. 올바르게 구성하려면 “문장 a: ‘ ’는 거짓이다.”처럼 구성하며 작은 따옴표 안에는 수학적 진술이 오게끔 규칙을 정해야한다. 이 규칙이 바로 상위수학인 것이다.

3. 괴델 수

상위수학은 앞 장에서 말했듯 수학에 관한 언어이다. 즉 수 체계가 아니라 기호의 패턴이다. 예를 들어 "‘’는 증명 가능하다."는 우리가 일상용어로 비유해서 이런 모양이지 실제로 이를 작성하면 $(\exists x)dem(x,z)$이다. 괴델은 이런 기호들의 패턴이 수 패턴과 같다고 말한다. 바로 괴델 수를 통해서 말이다. 즉, 상위수학이 사실 수라는 것이다. 그 말은 수학에 관하여 언급하는 언어가 수라는 것이기에 곧 자기 자신을 언급하는 자기지시적이라는 뜻이다. 즉, 러셀의 역설을 피하고 싶어도 피할 수 없다. 그럼 이 놀라운 것을 가능하게 해준 괴델의 수를 구성해보도록 하자.

정의 3.1(PM)

모든 통상적인 산술학적 표현을 나타낼 수 있고 또 익숙한 모든 산술학적 관계가 확립될 수 있는 형식화된 연산 체계

정의 3.2(공리)

일련의 원초 형식문

정의 3.3(정리)

일련의 변형 규칙을 통해 공리들로부터 연역될 수 있는 형식문

공리는 이 PM의 토대이며 이 공리들이 변형 규칙을 지키며 서로 뭉치면 정리가 된다. PM의 형식문들은 기본 기호로 이루어져 있는데 이 기본 기호들은 뭉쳐서 형식문이 되며, 이 형식문들은 모여서 하나의 증명이 된다. 괴델은 각각의 기본 기호, 각각의 형식문, 각각의 증명마다 단 하나의 수를 부여할 수 있음을 밝히었다. 괴델 수는 하나의 인식표로 괴델 수를 제시하면 그게 무엇인지 알 수 있고 그 반대의 경우에도 항상 괴델 수를 찾을 수 있다. 기본 기호에

부여되는 괴델 수를 기호의 괴델 수라고 하고 형식문에 부여되는 괴델 수는 형식문의 괴델 수, 증명에 부여되는 괴델 수는 증명의 괴델 수라고 한다. 기본 기호는 상향 기호와 변항 기호로 나누어져 있다. 각각 어떻게 괴델 수가 부여되는지 알아보자.

표 3.4(상향 기호와 괴델 수, 일상적 의미)

상향 기호	괴델 수	일상적 의미
~	1	아니다
∨	2	또는
⊃	3	만일 …라면 …이다.
∃	4	…이 있다.
=	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	구두점(왼쪽 괄호)
)	9	구두점(오른쪽 괄호)
,	10	구두점(쉼표)
+	11	더하기
×	12	곱하기

위 표를 보고 이상함을 느낀 독자가 있을 것이다. 분명 기호는 아까 무의미하다고 하였는데 표에서는 의미를 적어주었다. 이게 어찌 가능한 것인가? '~'을 보고 어떻게 그게 '아니다.' 라는 의미로 볼 수 있는가? 답은 그럴 수 있다. 왜냐하면 그 기호들이 우리가 기대하고 있는 역할을 하기 때문이다. '~'이란 기호가 나올 때 마다 '~'이 우리가 기대하고 있는 '아니다.'라는 역할을 해준다. 그러나 이런 해석을 단순 몇 개의 정리만을 보고 의존한다면 미흡할 수 있다. 당장 우리가 몰랐던 어떤 정리가 있어서 '~'이 그 정리에서 '아니다.'라는 역할을 하지 못한다면 더 이상 그 의미로 쓸 수 없지 않는가? 그래서 괴델은 충분히 많은 정리에서 이 기호들이 그 의미를 가질 수 있다는 것을 증명하였다. 이것으로 무의미한 기호를 일상적 의미로 해석할 수 있게 되었다. 이를 통해 PM에서의 형식문은 산술학적 진리로 환원할 수 있고 반대로 산술학적 진리를 PM에서의 형식문으로 환원할 수도 있다. 이것의 의의는 첫째, PM이 수론을 대신할 수 있는 힘을 가지고 있다는 것과 둘째, 각각의 기호 모두에 대한 관례적 해석을 분명하게 규정해준다는 것이다. 이것에 대한 보조 정리는 다음과 같다

보조정리 3.5(대응 보조 정리[14])

(1) 모든 각각의 원초 재귀적 진리[15]는 PM의 기호 나열로 바뀌면 정리가 된다.
(2) 형식적 기호들과 기대한 의미가 1대1 대응 관계가 있다.

이 보조정리로 인해 우리는 진리성과 의미가 분리될 수 없도록 얽혀 있다는 것을 알게 된다.

기본 기호에는 상향 기호도 있지만 세 가지의 변항도 있다. 첫째, ‘x’, ‘y’, ‘z’ 등등의 숫자 변항[16]이다. 이 변항에는 ‘0’, ‘ss0’ 등등 숫자를 대입할 수 있다. 둘째, ‘p’, ‘q’, ‘r’ 등등의 문자 변항[17]이다. 이 변항에는 형식문 즉, 문장을 대입할 수 있다. 셋째, ‘P’, ‘Q’, ‘R’ 등등의 술어 변항[18]이다. 이 변항에는 “소수이다.”, “보다 크다” 등등 술어를 대입할 수 있다. 괴델 수 대응은 숫자 변항에는 12보다 큰 소수를 대응하고 문장 변항에는 12보다 큰 소수의 제곱수를 대응하며 술어 변항에는 12보다 큰 소수의 세제곱수를 대응한다.

표 3.6(변항의 괴델 수)

숫자 변항	괴델 수	가능한 대입 실례
x	13	0
y	17	ss0
z	19	y
문장 변항	괴델 수	가능한 대입 실례
p	13^2	0=0
q	17^2	(∃x)(x=sy)
r	19^2	p⊃q
술어 변항	괴델 수	가능한 대입 실례
P	13^3	x=sy
Q	17^3	~(x=ss0×y)
R	19^3	(∃z)(x=y+sz)

14) Correspondence lemma
15) Primitive recursive truth
16) Numerical variable
17) Sentential variable
18) Predicate variable

예시 3.7

(∃x)(x=sy) -> 8, 4, 13, 9, 8, 13, 5, 7, 17, 9
-> $2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9$

이제 이렇게 기호마다 부여한 괴델 수로 형식문의 괴델 수를 이끌어낼 수 있다. 각 기호들의 괴델 수를 차례대로 소수들의 거듭제곱수로 보면 각각의 형식문마다 각기 다른 괴델 수를 부여할 수 있다.

그럼 형식문들이 나열되어있는 증명에 어떻게 괴델 수를 부여할까?

(∃x)(x=sy)

(∃x)(x=s0)

위 형식문은 'y의 다음 수 x가 존재한다. 그러므로 0의 다음수 x가 존재한다.'라는 형식문의 나열이다. 예시 3.7에서 구한 (∃x)(x=sy)의 괴델 수를 m이라고 하자 그리고 (∃x)(x=s0)의 괴델 수를 n이라고 하자 그럼 위와 같은 형식문의 나열의 괴델 수는 $2^m \times 3^n$이다.

이를 통해 PM의 모든 표현은 다 괴델 수를 통해 산술학적 진리와 1대1 대응이 된다. 즉, 괴델 수를 통해 PM이 완벽하게 산술학으로 바뀐다. 그러므로 당연히 주어진 괴델 수로 그 것과 대응 관계에 있는 PM상의 표현을 찾을 수 있다.

정리 3.8(산술학의 기본 정리[19])

모든 양의 정수는 유일한 소인수 분해를 갖는다.

예시 3.9(주어진 괴델 수로 형식문 찾기)

주어진 괴델 수를 243,000,000이라 하자
(Step1) 소수의 거듭제곱의 곱으로 나타내기: 64×243×15,625
(Step2) 소인수 분해: $2^6 \times 3^5 \times 5^6$
(Step3) 소수의 지수와 대응되는 기호 찾기: 6 -> 0, 5 -> =, 6 -> 0

19) The Fundamental Theorem of Arithmetic

(Step4) 문장 완성: 0=0

이 예시는 괴델 수로 어떻게 형식문을 찾는지 그리고 그 반대로 올라가면 형식문의 괴델 수를 어떻게 찾는지 보여준다. 형식문 당 하나의 괴델 수, 괴델 수 당 하나의 형식문이 대응이 되는 건 산술학의 기본 정리가 보장해준다.

이제 남은 것은 상위수학의 산술화이다. 우리는 이 장을 시작하면서 괴델 수를 통해 상위수학을 산술화 하여 수학과 같이 논할 수 있다고 하였다. 그럼 상위수학을 어떻게 산술화 할까?

예시 3.10(상위수학적 진술의 산술화)

'~(0=0)'의 첫 번째 기호는 '~'이다.

-> '~(0=0)'의 괴델 수는 $m = 2^1 \times 3^8 \times 5^6 \times 7^5 \times 11^6 \times 13^9$이다.

-> 형식문의 첫 번째 기호가 '~'이라는 건 $2 \mid m$ & $2^2 \nmid m$을 의미한다.

-> 2로 나눌 수 있다는 것은 곱해서 m이 되는 어떤 수가 있다는 것이다.

-> (∃z)(ssss...ssss0 = z×ss0) &[20] ~(∄z)(sssss....sssssss0 = z×(ss0×ss0))

-> 상위수학적 진술에 괴델 수를 부여할 수 있다.(상위수학적 진술의 산술화)

이제 괴델의 불완전성 정리를 증명하기 위해 꼭 필요한 한 가지의 상위수학적 진술을 괴델 수로 표현하고 한 가지의 함수를 정의하려고 한다. 미리 말하고 시작하자면 상위수학적 진술은 '괴델 수 x를 가진 형식문 나열은 괴델 수 z를 가진 형식문에 대한 증명이다.'이며 함수는 '괴델 수 z는 괴델 수 x 속 괴델 수 17과 대응된 변항에 괴델 수 x를 대입한 문장의 괴델 수이다.'이다. 상위수학적 진술부터 차근차근 알아보도록 하자.

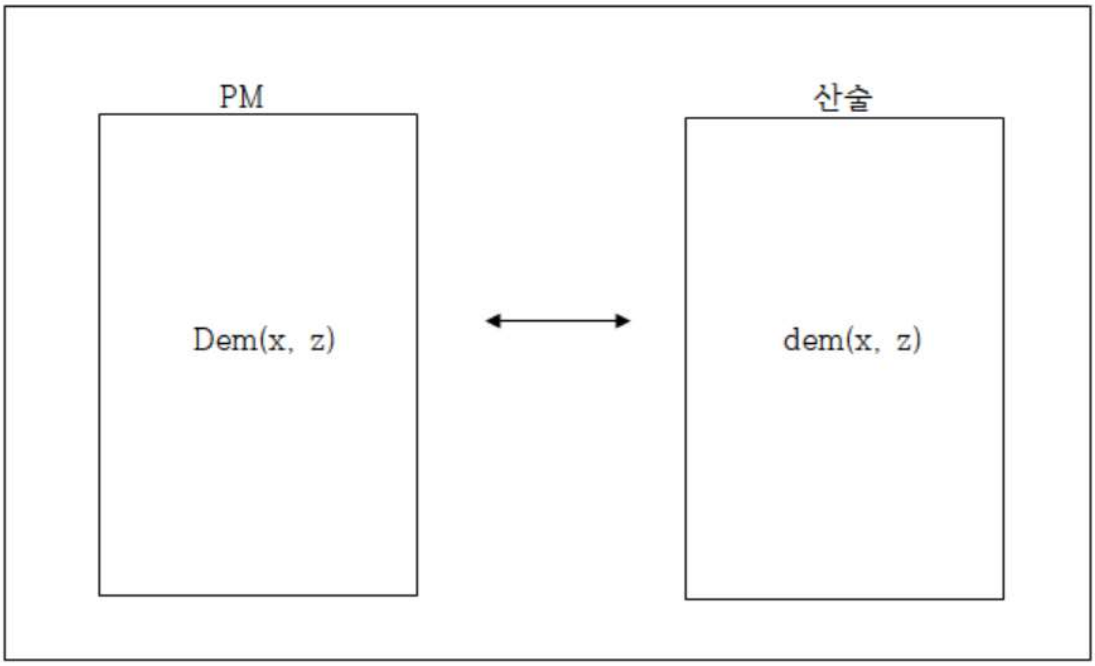
우리는 위의 예시에서 (∃x)(x=sy) (∃x)(x=s0)의 괴델 수를 $k = 2^m \times 3^n$로 부여하였다. 생각해보면 증명의 괴델 수인 k와 결론의 괴델 수인 n사이에는 분명 산술학적 관계가 있다. 앞으로 x와 z사이의 이런 산술학적 관계를 "dem(x, z)"라는 축약 표현을 사용할 것이다. 즉 'dem(x, z)'의 의미는 'x는 z

---

20) '&'는 '그리고'라는 의미로 'p&q'는 '~(~p∨~q)'의 축약 표현이다.

의 증명이다.'이다. dem(x, z)가 수 x와 z사이의 원초 재귀적 관계라는 것을 인정하자(괴델은 엄밀하게 증명했다). 그럼 대응보조정리에 의해 dem(x, z)에 대응되는 괴델 수가 있을 것이다. 이제 dem(x, z)를 괴델 수로 생각하고 dem(x, z)이 의미하는 형식문을 대문자 D를 사용하여 Dem(x, z)라고 쓰도록 하자.

그림 3.11(PM과 산술의 관계)



만약 'dem(2, 5)'라고 쓰면 이는 괴델 수 2는 괴델 수 5의 증명이라는 의미인데 이는 올바르지 못한 진술이다. 2와 5는 형식문도 아니며 ∨는 =의 증명이라는 것인 말이 안되지 않는가. 그러나 이에 대응되는 형식문인 'Dem(ss0, sssss0)'은 단순 무의미한 기호 나열이다. 이렇게 산술적 진술(dem(x, z))이 옳은 경우에는 언제나 PM 속에 'Dem(sss...sss0, ssss...ssss0)' 형태의 정리가 있음을 대응보조정리가 보장한다. 즉, 옳은 상위수학적 진술은 모두 다 PM의 정리로 반영이 된다. 그러므로, "' '는 PM 규칙에 의해 ' '을 증명하지 못한다."라는 옳은 상위 수학적 진술들도 전부 PM의 정리로 반영이 된다. 그러므로 PM은 괴델의 수에 의해 자기 자신에 대해 말할 수 있게 된 것이다.

이제 한 가지 함수를 정의하고 괴델의 증명으로 넘어가자. 우린 앞에서 '(ヨx)(x=sy)'의 괴델 수를 m이라고 하였다. 그럼 이 형식문에 변항 'y'에다가 m

을 대입해보자. ‘(∃x)(x=sssss...sssss0)[21]’이 될 것이다. 그럼 분명 이 문장도 엄청 크겠지만 괴델 수를 가질 것이다. 우리가 정의하고 싶은 함수는 바로 괴델 수 17과 대응되는 변항 ‘y’에 특정 괴델 수 x를 대입한 함수이다. 이 함수가 원초 재귀적 함수라는 것은 괴델이 잘 증명하였으니 의심치 말기로 하자. 그럼 대응보조정리에 의해 이 함수로 나온 문장도 괴델 수를 가질 것이다. 그 괴델 수를 ‘sub(x,17,x)’로 하자. 즉, 괴델 수 x를 갖는 문장 속의 괴델 수 17과 대응되는 변항에 괴델 수 x를 대입한다는 의미이다. 이 함수가 자기지시적이라고 생각하는 독자가 분명 존재할 것이다. 그러나 이 함수는 자기지시적이지 않는다. 그 이유를 알아보자.

예시 3.12(자기지시적 문장과 아닌 예시)

1) p: p는 거짓이다 (자기지시적 문장)
2) x: y는 거짓이다 (자기지시적 문장 아님)
3) sub(x,17,x): x는 거짓이다 (자기지시적 문장 아님)

위 예시의 1번은 확실히 자기지시적이다. p라는 괴델 수를 가진 문장이 “p라는 괴델 수를 가진 문장은 거짓이다.”라고 했기 때문이다. 그러나 2), 3)은 자기지시적이지 않다. 3번을 보자. 3번을 일상 용어로 나타내면 다음과 같다. “‘x가 거짓이다.’는 거짓이다.” 이 문장은 자기지시적으로 보이지만 이는 일상 용어로 표현했기 때문에 그런 것이다. PM에서는 괴델 수가 다르기 때문에 전혀 문제되지 않는다. ‘sub(x, 17, x)’ 또한 괴델 수이기 때문에 이와 대응되는 PM 속 형식문을 대문자 S를 사용하여 ‘Sub(x, 17, x)’라고 하자. 이제 괴델의 증명을 따라갈 준비가 끝났다. 괴델의 증명을 만나보자.

21) s가 m+1개이다.

4. 괴델의 제 1 불완전성 정리

정리 4.1 (괴델의 제 1 불완전성 정리)

페아노 공리계를 포함하는 공리계는 불완전하다
즉, 공리계 안에 참이지만 증명불가능한 명제가 존재한다.

괴델의 제 1 불완전성 정리의 증명 흐름은 다음과 같다.
(1) 참이지만 증명 불가능한 문장을 만든다. 이 문장을 형식문 G라고 하자.
(2) 형식문 G가 그 형식적 부정문 ~G도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다는 것을 밝힌다.
(3) 형식문 G가 형식적으로 증명될 수 없음에도 불구하고 옳은 산술학적 형식문이라는 것을 증명한다.
(4) 형식문 G가 옳으면서도 PM 속에서 형식적으로 결정될 수 없기 때문에 PM은 불완전 체계이어야 한다는 것을 밝힌다. 더 나아가 PM이 본질적으로 불완전 체계이다.

그럼 한 번 차근차근 따라가 보자.

(1) 형식문 “Dem(x, z)”에 존재 양화사를 더해보자 그럼 “(∃x)Dem(x, z)” 이런 형식문이 만들어진다. 이 형식문을 일상 용어로 해석하면 “괴델 수 z에 대응되는 문장의 증명이 존재한다.”이다. 즉, “괴델 수 z에 대응되는 문장은 증명 가능하다.”라고도 말할 수 있다. 이제 이 문장의 형식적 부정문을 생각해보자. “~(∃x)Dem(x, z)” 이 문장의 해석은 “괴델 수 z에 대응되는 문장은 증명 불가능하다.”이다. 이제 z자리에 우리가 앞에서 정의한 함수의 형식문인 Sub(y, 17, y)를 넣어보자. “~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y))” 이 문장의 해석은 “괴델 수 y와 대응되는 문장의 괴델 수 17에 대응되는 변항에 괴델 수 y와 대응되는 문장을 대입한 문장은 증명 불가능하다.” 괄호와 ‘/’을 이용하여 끊어서 보자면 “[괴델 수 y와 대응되는] 문장의 / [괴델 수 17에 대응되는] 변항에 [괴델 수 y와 대응되는] 문장을 대입한 문장은 / 증명 불가능하다.”이다. 그런데 이 y는 숫자 변항이다. 변항이기 때문에 어떤 숫자가 들어가냐에 따라 달라진다. 그럼 무슨 숫자를 대입해주어야 할까? 바로 형식문 “~(∃x)Dem(x,

Sub(y, 17, y))"의 괴델 수이다. 계산하기에는 매우 복잡하고 큰 수이겠지만 분명히 단 한 개의 수와 대응된다. 형식문 "~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y))"의 괴델 수를 n이라 하고 이제 y에 n을 대입해보자.

"~(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"

먼저 "~(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"이 옳은 형식문이라는 것은 당연하다. 올바른 문법으로 구성한 형식문이기 때문이다. 그럼 이 형식문이 주장하는 바대로 "Sub(n, 17, n)은 증명불가능하다."는 참이다. 형식문 "~(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"을 형식문 G라고 하자. 그럼 G는 PM 속에 나타나기 때문에 괴델 수 g를 가져야 한다. 그럼 g가 뭘까? 조금만 생각해보면 g=sub(n, 17, n)이라는 것을 알 수 있다. n은 '~(∃x)Dem(x, Sub(y, 17, y))'의 괴델 수였고 이 문장 속 변항 y에 n을 넣은 것이 "~(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"이 아니던가? 그러므로 g=sub(n, 17, n)이다. 근데 sub(n, 17, n)의 형식문은 Sub(n, 17, n)이지 않았던가? 즉, 참이지만 증명 불가능한 명제를 우린 만들었다. '이 문장은 거짓이다.'를 문법적으로 올바르게 유도한 것이다.

(2) 형식문 G가 그 형식적 부정문 ~G도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다는 것을 밝히는 건 비교적 간단하다. 만약 G가 증명될 수 있다면 "(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"이라는 형식문도 -이 형식문의 의미 자체가 'G는 증명될 수 있다.'이기 때문에- 증명될 수 있다. 근데 이 형식문은 G의 형식적 부정문인 ~G이다. 반대로 ~G가 증명될 수 있다면, "~(∃x)Dem(x, Sub(n, 17, n))"이라는 형식문도 증명될 수 있는데, 이는 형식문 G 자체도 증명될 수 있다는 것과 같은 말이다. 그러므로 G가 그 형식적 부정문 ~G도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다.

(3) G는 "PM 속에는 G에 대한 증명이 없다."라고 주장한다. 그러나 우리는 (2)를 통해 G와 ~G 중 어느 하나가 PM속에서 결정될 수 없다는 것을 알았다. 그래서 PM속에 G에 대한 증명이 없다는 것을 밝혔다. 하지만 이것이 G가 주장하는 그 자체이므로 G는 올바른 주장, 즉 진리를 주장하고 있다.

(4) 이 정리 이름이 불완전성 정리인 이유를 생각해보자. 불완전하다는 것은 완전성이 보장되어있지 않다는 것이다. 그럼 완전성은 무엇이었는가? 완전성은 연역 체계의 공리들이 만일 그 체계 속에서 표현될 수 있는 모든 옳은 진술이 그 공리들로부터 추리 규칙에 의해서 형식적으로 연역될 수 있다면 완전성을 갖는다고 한다. 그러나 불완전하다는 것은 결국 방금 우리가 만든 G는 PM 속에서 형식적으로 연역될 수 없지만 PM의 옳은 형식문이라는 것이다. 그러나 이는 우리가 (2), (3)을 통해 확인하였다. 즉 PM은 불완전하다. 그럼 PM을 보수공사를 통해 완전하게 만들 수는 없는가? 괴델은 그게 불가능하다고 했다. 왜냐하면 PM은 본질적으로 불완전하기 때문이다. G의 문제를 해결하기 위해 G를 공리로 추가한다 해도 그 확장된 체계 역시 모든 산술학적 진리를 형식적으로 만들어내기에는 충분하지 못하다. 왜냐하면 또 다른 결정될 수 없는 형식문이 그 확장된 체계 속에서 만들어질 수 있기 때문이다. 이 만드는 방법은 조금 복잡하므로 여기서 소개하지는 않지만 그 흐름만 소개하겠다. G를 공리로 추가한 확장된 PM에서 결정 불가능한 G'이라는 형식문을 G를 모방하는 방식으로 만들 수 있다. G'을 공리로 또 추가한다면 더 확장된 PM 상에서 G'을 모방한 G''을 만들 수 있다. 그러므로 PM은 본질적으로 불완전하다.

PM은 무엇이었는가? 공리로부터 연역 규칙에 따라 만들어진 하나의 연역 체계였다. 고대 그리스부터 내려온 그 연역체계가 본질적으로 불완전하다는 것을 괴델이 증명한 것이다. 즉, 형식적인 공리적 추론 방식의 수학이 불완전하다는 것이다.

5. 괴델의 제 2 불완전성 정리

정리 5.1 (제 2 불완전성 정리)

페아노 공리계를 포함하는 공리계는 그 공리계가 무모순하다는 것을 그 공리계 안에서 증명할 수 없다

일상용어로 해석하면 산술계가 무모순하다는 것을 산술계로 증명할 수 없다는 것이고, 이를 비유하자면 자신이 완벽하다는 것을 자신이 스스로 증명할 수 없다는 것이다. 괴델은 'PM은 무모순적 체계이다.'라는 상위 수학적 진술을 대신하는 PM의 형식문 A를 만드는 방법을 설명하고 형식문 "A⊃G"가 PM 속에서 형식적으로 연역될 수 있다는 것을 증명하였다. 마지막으로 형식문 A가 PM 속에서 연역될 수 없음을 밝힘으로써 제 2 불완전성 정리를 증명하였다. 다시 한 번 말하자면 제 2 불완전성 정리의 목표가 A가 증명될 수 없음을 밝히는 것이다. 그 과정은 A로부터 G가 만들어 진다는 것을 보이면 된다. 그럼 A가 증명 된다는 것은 G가 만들어 진다는 것인데 G는 앞선 제 1 정리에 의해 만들어 지면 안된다. 그러므로 A는 증명 불가능하다는 방향으로 증명할 것이다. 즉, 목표는 A를 만들고 A⊃G를 이끌어 내는 것이다.

먼저 형식문 A를 구성해야 한다. 형식문 A는 "PM은 무모순적 체계이다."라는 상위 수학적 의미를 가지고 있었다. "PM은 무모순적 체계이다."라는 말은 "PM 속에서 증명될 수 없는 PM의 형식문이 적어도 하나 있다."와 같은 말이다.[22] 이는 괴델의 사상에 의해 "어떤 수 y는 어떤 x에 대해서도 dem(x, y)라는 관계를 성립시키지 않는 속성을 갖고 있다."로 표현할 수 있다. 이를 형식문으로 표현하면 다음과 같다

$$(\exists y)\sim(\exists x)Dem(x,\ y)$$

이 형식문이 의미하는 바는 "PM 속에서 [괴델 수가 x인] 형식문 나열을 증명으로 가질 수 없는 [괴델 수가 y인] 형식문이 적어도 하나 있다." 이 형식문을

22) PM이 무모순적이려면 p와 ~p 둘 중 하나만 PM속에 있어야한다. 만약 둘 다 있으면 무모순성이 깨진다. 그렇기 때문에 PM은 p와 ~p 중 하나는 가지고 있으면 안된다. 그러므로 PM 속에서 증명될 수 없는 PM의 형식문이 적어도 하나 있어야 한다.

A라고 하자.

이제 $A \supset G$를 만들어 보자. 형식문 A는 "만일 PM이 무모순적 체계라면 PM은 불완전 체계이다."의 전건이다. 후건은 "PM은 불완전 체계이다."이다. "PM은 불완전 체계이다."을 다르게 말하면 증명될 수 없는 형식문 X에 관하여 "X는 PM의 정리가 아니다."라고 하는 것과 같다. 그런데 이런 X는 우리가 너무나도 잘 안다. 바로 앞 장에서 우리가 만들었던 G이다. 즉, "만일 PM이 무모순적 체계라면 PM은 불완전 체계이다."라는 말은 $A \supset G$와 같은 말인 것이다. 이를 형식문으로 나타내면 다음과 같다.

$$(\exists y) \sim (\exists x) Dem(x, y) \supset \sim (\exists x) Dem(x, Sub(n, 17, n))$$

자 이제 거의 끝났다. A가 PM 속에서 증명될 수 있다고 가정해보자. 그러면 $A \supset G$는 전건 긍정에 의해 G도 증명할 수 있어야한다. 그러나 G는 증명 불가능하다고 제 1 불완전성 정리에서 다루었다. 그러므로 A는 PM 속에서 증명될 수 없다. 즉, PM의 무모순성을 PM 속에서 증명할 수 없다.

6. 맺음말

고 2때 처음 괴델의 불완전성 정리를 접하고 나서 받은 그 충격은 아직도 생생히 기억이 난다. 유클리드부터 시작하여 칸토어 러셀 힐베르트 괴델 그리고 튜링까지 이어지는 하나의 물결은 나의 잘못된 직관을 혼내주는 큰 파도와도 같았다. 누가 삼각형의 내각의 합이 180°보다 크거나 작을 수 있다고 생각할 수 있었겠는가? 누가 자연수 집합의 크기와 유리수 집합의 크기가 같을 것이라 생각할 수 있었겠는가? 누가 참도 거짓도 아닌 명제가 존재할 것이라고 생각했겠는가? 누가 수학이 불완전하다고 생각할 수 있겠는가? 이 모든 커다란 충격은 고 2가 감당하기엔 통증이 매우 컸다. 이를 이해하기 위해 그동안 해왔던 치열한 노력들이 주마등처럼 지나가는 듯하다. 이 괴델의 불완전성 정리 때문에 수리논리학 분야에 뜻이 있었으나 여러 가지 이유로 그 분야에 대한 꿈을 접게 되었고, 더 이상 괴델과도 만날 일이 없게 되었다. 그러나 한 때는 매일 동거동락하였고 서로 부대끼며 살아온 옛 정이 많이 남아있어서 어떤 방식으로 작별을 고할까 많은 생각을 하였다. 처음으로 진정한 수학적 자극을 주었고 처음으로 수학적 좌절과 직면하게 해주었으며 처음으로 커다란 수학적 성취감을 느끼게 해준 이 정리를 여러 사람들에게 소개하는 방식을 통해 근사한 인사를 하고자 한다. 길지만 부족한 글 끝까지 읽은 것에 대해 무한한 감사를 느낀다.