미친개를 찾아라

송한림

05.14.2024

미친개를 찾아라

Question 1

어느 마을 사람들은 모두 개를 한 마리씩 키우고 있다. 어느날 촌장이 마을에 미친개가 있으니 미친개의 주인은 밤에 자신의 개를 총으로 쏴 죽이라고 했다.

1. *개의 주인은 자신의 개가 미쳤는지 알 수 없으나, 주인을 제외한 다른 사람들은 가능하다.*
2. *모든 마을 사람들은 하루 안에 마을의 모든 개를 확인할 수 있다.*
3. *미친개는 그 주인만이 죽일 수 있다.*
4. *마을 사람들은 모두 매우 똑똑해 최선의 선택을 하지만, 너무 과묵해서 누구의 개가 미쳤는지 그 주인에게 절대로 알려주지 않는다.*

하루가 지나고 이틀이 지나고 사흘이 지나도 총소리는 나지 않았으나, 나흘째에 총성이 몇 발 울렸다. 그렇다면 미친 개는 몇 마리일까?

Solution.

Solution.

사실, 이러한 풀이는 수학적 귀납법과 밀접한 관계가 있다.

미친개를 찾아라

미안하다..

Recall (수학적 귀납법(The Induction Principle))

x에 대한 명제를 $P(x)$라 하자. 다음과 같은 조건들을 만족할 때, 모든 자연수 n에 대해 P가 성립한다.

1. *$P(0)$이 성립한다.*
2. *모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $P(n)$이면 $P(n+1)$이다.*

미친개를 찾아라

Recall (수학적 귀납법(The Induction Principle))

x에 대한 명제를 $P(x)$라 하자. 다음과 같은 조건들을 만족할 때, 모든 자연수 n에 대해 P가 성립한다.

1. *$P(0)$이 성립한다.*
2. *모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $P(n)$이면 $P(n+1)$이다.*

이때,

1. 자연수는 무엇일까?
2. 어떤 자연수 n이 있을 때, $n+1$은 어떻게 정의될까?

미친개를 찾아라

Recall (수학적 귀납법(The Induction Principle))

x에 대한 명제를 $P(x)$라 하자. 다음과 같은 조건들을 만족할 때, 모든 자연수 n에 대해 P가 성립한다.

1. *$P(0)$이 성립한다.*
2. *모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $P(n)$이면 $P(n+1)$이다.*

이때,

1. 자연수는 무엇일까?
2. 어떤 자연수 n이 있을 때, $n+1$은 어떻게 정의될까?

$\Rightarrow$ 우선, 자연수가 만들어지는 과정을 알아보자.

집합과 공리

자연수를 만들기 전에, 다음과 같은 규칙(공리)들을 설정하자.

Axiom

1. *공집합($\varnothing$)이 존재한다.*
2. $X \subseteq Y$ *이고* $Y \subseteq X$ *이면* $X = Y$*이다.*
3. x*에 대한 명제를* $P(x)$*라 하자. 모든 집합* A*에 대해,* $B = \{x \in A : P(x)\text{가 참이다}\}$*가 존재한다.*
4. *모든 집합* A, B*에 대하여,* $\{A, B\}$*가 존재한다.*
5. *모든 집합* A, B*에 대하여,* $A \cup B$*가 존재한다.*
6. *모든 집합* S*에 대하여, 멱집합* $P(S)$*가 존재한다.*
   ex. $A = \{a, b, c\}$.
   $\Rightarrow \; P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 다음수(successor)는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 <u>다음수(successor)</u>는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

Example 3

1. $1 = S(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 다음수(successor)는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

Example 3

1. $1 = S(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.
2. $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 다음수(successor)는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

Example 3

1. $1 = S(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.
2. $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
3. $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
   $= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 <u>다음수(successor)</u>는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

Example 3

1. $1 = S(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.
2. $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
3. $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
   $= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
4. $4 = \cdots = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$.

자연수

Definition 2

1. $0 = \varnothing$이라 하자.
2. 집합 x의 다음수(successor)는 $S(x) = x \cup \{x\}$을 의미하며, $S(x) = x + 1$로 표기한다.

Example 3

1. $1 = S(0) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.
2. $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
3. $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
   $= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
4. $4 = \cdots = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$.

Example 3에서 알 수 있듯이, 이러한 표기는 너무 복잡하다는 단점이 존재한다.

Corollary 4

$x = \{0, 1, 2, \cdots, x-1\}$.

Proof.

1. $1 = \{\varnothing\} = \{0\}$.
2. $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$.
3. $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.
4. $4 = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

이러한 과정을 반복하여 원하는 결과를 도출할 수 있다. $\square$

수학적 귀납법

Definition 5

다음과 같은 조건들을 만족하는 집합 I를 귀납적(inductive)이라 정의하자.

1. $0 \in I$.
2. $n \in I$이면 $(n+1) \in I$이다.

수학적 귀납법

Definition 5

다음과 같은 조건들을 만족하는 집합 I를 귀납적(inductive)이라 정의하자.

1. $0 \in I$.
2. $n \in I$이면 $(n+1) \in I$이다.

Definition 6

자연수의 집합(the set of all natural numbers)이란 다음과 같은 집합을 의미한다.

$$\mathbb{N} = \{x : \text{모든 귀납적인 집합 } I \text{ 에 대하여 } x \in I \text{ 이다}\}.$$

이때, $\mathbb{N}$의 원소를 자연수(natural numbers)라고 한다.

수학적 귀납법

Theorem 7

$\mathbb{N}$은 귀납적이다. 또한, 모든 귀납적인 집합 I에 대해 $\mathbb{N} \subseteq I$를 만족한다.

Proof. (i) 모든 귀납적인 집합 I에 대해 $0 \in I$를 만족하므로, $0 \in \mathbb{N}$이다.
(ii) 만약 $n \in \mathbb{N}$이라면, 모든 귀납적인 집합 I에 대해 $n \in I$일 것이므로, $(n+1) \in I$임을 알 수 있다. 따라서 $(n+1) \in \mathbb{N}$이다. 즉, $\mathbb{N}$은 귀납적이다. □

수학적 귀납법

Principle 8 (수학적 귀납법(The Induction Principle))

x에 대한 명제를 $P(x)$라 하자. 다음과 같은 조건들을 만족할 때, 모든 자연수 n에 대해 P가 성립한다.

1. *$P(0)$이 성립한다.*
2. *모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여, $P(n)$이면 $P(n+1)$이다.*

Proof. 두 조건들을 간단히 말하자면, $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$가 귀납적이라는 것과 동치이다. 따라서 $\mathbb{N} \subseteq A$임을 알 수 있다. □

사실, 이는 $\mathbb{N}$의 정의에서 자연스럽게 따라오는 결과이기도 하다.

Principle 9 (강한 수학적 귀납법(The Induction Principle, Second Version))

x에 대한 명제를 $P(x)$라 하자. 어떤 $n \in \mathbb{N}$에 대해서도, 모든 $k < n$에 대해 $P(k)$를 만족할 경우 $P(n)$ 역시 만족한다고 하자. 그렇다면 모든 자연수 n에 대해 P가 성립한다.