<Perspective of me on the Collatz Conjecture>

1. 모든 수에 대해 1을 더해서 생각하자.
   1) 계산 시 보다 간편해짐. 만약, 이렇게 하지 않고 2진수로 바꾸게 되면 자리올림이 더 많이 발생하게 된다. 이는 증명보다 직접 하였을 때 편의로 인해 결정한 부분이다.
2. 수를 2진수로 바꾸어 생각하자.
   1) 사용하는 숫자의 종류가 0과 1로 10진수와 같은 다른 체계보다 적다.
   2) 또한, 앞자리수가 달라지는 다른 진법들과 달리 1로 동일하다.
3. '모든 자릿수에 대해서 하나 아랫자리에 1을 더한다.' 에 대한 증명(p14)

   이 부분에 대해 설명하기 전에 세미나에서도 언급하였지만, 2번 과정은 단순히 2로 나누는 과정이고, 1번 과정은 어떤 홀 수를 3배 하고 1을 더한 후 한번 만 2로 나누어서 나오는 특수한 상황을 가정하였음을 명시한다.

   결론적으로 내가 이곳에서 하고 싶었던 것은 시러큐스 함수의 결과값을 찾는 것이었다. 그리고 시러큐스 함수라 함은 기본적으로 홀수를 정의역으로 갖는 함수이기에 무조건 시작값은 홀수이다. 그러므로 홀수 A를 가정한다면, 다음 수는 무조건 $3A+1$이 나와야만 한다. 그리고 나는 이 A라는 수를 $B-1$로 바꾸어 표현하였다. 그렇다면, $3A+1=3B-2$가 나오게 된다. 그렇다면, 1번 과정의 결과값은 $\frac{3B-2}{2}$여야 한다. 이를 조금 다르게 표현하면 아래와 같다.

   $$B+\frac{B}{2}-1$$

   $$let, \quad B=\overline{a_n a_{n-1}\dots a_1 a_0}_{(2)}\ (a_{n-1}, a_{n-2}\dots a_1 = 0\ or\ 1, a_n = 1, a_0 = 0)$$

   즉, 다음과 같은 B에서 만약 a_k값이 1이라면, a_{k-1}값에 1을 더하면, 된다. 단, 이는 생각보다 많은 자리올림 현상을 만들어 보다 나은 방법을 추구했고, 그 방법이 p16에 적혀있다.
4. 1집단에 대한 규칙에 대한 증명(p16)

   우선, 이 증명을 시작하기 전에 규칙이 자세히 이해가 가지 않는 다면, 27에 대한 콜라츠 궤도(p17)을 보고 오는 편이 좋다.

   10 과 적혀 있는 것에 대해 11로 바꾸는 것은 위와 다르지 않으니 넘어가도록 하겠다. 그렇다면, 1이 연속해서 나오는 것에 대해서만 하겠다. 사실 발표자료에 나와있는 표현보다 정확한 표현은 사실 $111\dots1110$으로 쓰는 것이 좋다. 왜냐하면, 1집단의 다음 수는 항상 0이 나와야 하기 때문이다. 사실 가장 간단한 증명은 위의 3번의 규칙을 적용하는 것이지만, 조금 더 명확히 하기 위해 아래와 같은 증명을 써본다.

   모든 임의의 1집단은 다음으로 이루어질 것이다. (참고로 당연히 이 1집단은 전체 2진수의 일부분일 것이다.)

   $$2^k+2^{k+1}+\cdots+2^l\ \ (단, k<l)$$

그렇다면, 이 1집단의 변화는 위 3번 증명에 따라 다음 수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}(2^{k-1}+2^k)+(2^k+2^{k+1})+\cdots(2^{l-2}+2^{l-1})+(2^{l-1}+2^l)\\ =2^{k-1}+2^k*2+2^{k+1}*2+\cdots+2^{l-1}*2+2^l\\ =2^{k-1}+2^{k+1}+2^{k+2}+\cdots+2^{l-1}+(2^l+2^l)\\ =2^{k-1}+2^{k+1}+\cdots+2^{l-1}+2^{l+1}\end{aligned}$$

따라서 다음은 만족한다.

5. 끝이 1집단으로 끝나는 경우에 대한 증명(p16)

   끝이 1집단으로 끝나면, 우리가 종국에 찾고자 하는 것이 나오지 않는다. 우리는 짝수 B를 원한다. 고로 조금 바꾸어야 한다. 바꾸기 위해 B에 1을 더하는 방법을 사용하였다. 식으로 보자.

$$B-1\to C-2\to\frac{C}{2}-1(=B'-1)$$

   간략히 표현하면, 위와 같은 방식을 사용하였다. 즉, 0을 하나 지우는 것은 2진수를 2(=$10_{(2)}$)로 나누는 것이었으므로 발생한 결과이다.

6. 자릿수 증가에 대한 증명(p18)

   0) 조금 더 정확한 표현

      사실 조금 더 엄밀히 말하자면, '증가할 수 있다'로 표현하는 것이 옳다. 실제로 만약, 끝이 10으로 끝나며 앞이 이러한 성질을 가진다면, 항상 증가하지는 않기 때문이다. 하지만, 끝이 10으로 끝나지 않는 한 모든 수에 대해서 만족하므로, 아래처럼 증명한다.

   1) 실제로 그러한가?

      1집단으로 시작한 경우 최대 자리수가 n번째 자리인 2진수 짝수 D를 가정하자.

      D는 다음과 같이 표현된다.

$$D=1*2^{n-1}+1*2^{n-2}+a_{n-2}*2^{n-3}\ldots+a_2*2^1+0*2^0$$
$$(a_{n-2},a_{n-3},\ldots a_2=0or1\to a_k\textit{는 2 진수에서 k 번째 자리수})$$

      그렇다면, 여기서 n번째 자릿수와 n-1번째 자릿수가 연속해서 나오므로 4번 증명에 따라 n+1번째 자리수가 생긴다.

      1010…10(1이 2개 이상 나오는 1집단)의 경우 해당 증명 및 4번 증명과 비슷하게 진행할 수 있으니 생략하겠다.

   2) 유일한가?

      사실 이것이 조금 까다롭다. 이것을 증명할 때는 나는 귀납적 방법을 이용하였다.

      우선 위와 같이 1집단으로만 된 것이 성립하다는 것은 알 수 있다. 만약, 이것 말고 다른 것이 있으려면, 맨 앞자리는 1이어야 하기에 두 번째 자리가 0이되어야 한다. 그리고 만약 세 번째 자리가 0이라고 했을 때 생각할 수 있는 가장 큰 수의 경우가 아래와 같기에 성립하지 않는다.

$$100111111\ldots110_{(2)}\to111011\ldots1101_{(2)}$$

위 경우 굳이 추가 과정을 하지 않았지만, 자릿 수가 감소할 수는 있을지언정 절대 증가할 수 없음은 확인할 수 있다. 결국 앞에서 두 번째 자리가 0이라면, 이 수의 자릿수가 증가하기 위해서는 세 번째 자리는 1이 와야 한다. 그리고 이때 네 번째 자리가 1이라면 증가한다.

마찬가지 논리로 이번에는 네 번째 자리를 0이라 가정을 하고 생각을 하면, 또 같은 방식으로 101011로 시작하는 수의 경우 증가할 수 있음을 보일 수 있다. 이러한 귀납적 방식으로 인해 해당 명제는 참이다.

7. 자릿수 감소에 대한 보충 설명

사실 이 부분에 대해 작성하는 중 예상치 못한 반례를 찾았다. 다만, 대부분의 경우 이러한 경향을 띠긴 하기에 추가적인 탐구가 필요해 보인다.

반례: $1010_{(2)} \rightarrow 1111_{(2)} \rightarrow 1000_{(2)}$

8. 사실상 $10_{(2)} - 1$이 되는 경우

원래 이것을 세미나때 하려고 했으나 까먹고 하지를 못했다. 그러니 이곳에서 해보자면, 1010…110이라는 수의 다음 단계에서 100…001이라는 것을 확인하면, 끝이다. 왜냐하면, 계속해서 '-1'을 생략하고 있지만, 여기서 붙여 보면, 1000….001-1은 곧 10000…00으로서 결국 2의 거듭제곱임을 쉽게 확인 가능하다. 곧 1로 즉 10-1로 떨어진다는 것이다.

그렇다면, 1010…10110에 대한 것을 확인하면 아래와 같다.

$$1010 \ldots 10110 \rightarrow 1111 \ldots 1112001_{(2)} \rightarrow 1111 \ldots 1120001_{(2)} \rightarrow 1111 \ldots 1200001_{(2)}$$
$$\rightarrow \cdots \rightarrow 1200 \ldots 00001_{(2)} \rightarrow 20000 \ldots 0001_{(2)} \rightarrow 1000 \ldots 0001_{(2)}$$

즉, 어렵게 보이기는 하지만, 사실 자리 올림을 반복하면 쉽게 확인할 수 있는 문제이다.