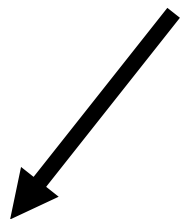


$$1 + 1 = 0$$

24학번 수학과 국예성

누르는 행위 : +1

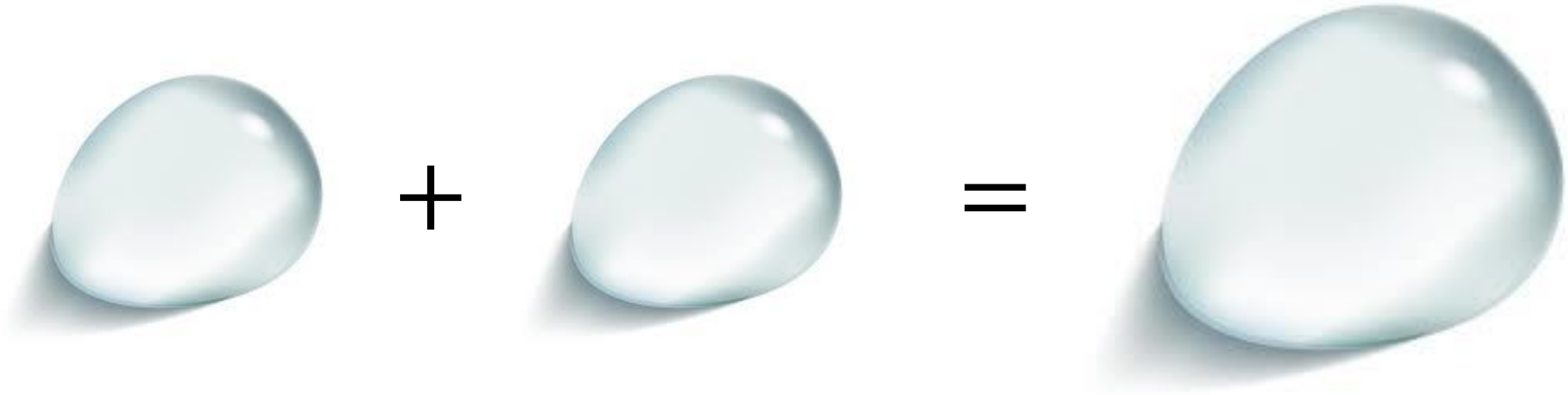


Off : 0
On : 1



On에서 한번 누르면 Off가 되므로 $1 + 1 = 0$

엄밀하지 않다!



그러므로 $1+1=1??$

엄밀하다?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

362
PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC
[PART II]

***54·42.** $\vdash :: \alpha \in 2. \supset : \beta \in \alpha. \mathfrak{H}! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in t''\alpha$

Dem.

$\vdash. *54·4. \supset \vdash :: \alpha = t'x \cup t'y. \supset :$

$\beta \in \alpha. \mathfrak{H}! \beta. \equiv : \beta = \Lambda. \vee. \beta = t'x. \vee. \beta = t'y. \vee. \beta = \alpha : \mathfrak{H}! \beta :$

$[*24·53·56. *51·161] \quad \equiv : \beta = t'x. \vee. \beta = t'y. \vee. \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash. *54·25. \text{Transp. } *52·22. \supset \vdash : x \neq y. \supset. t'x \cup t'y \neq t'x. t'x \cup t'y \neq t'y :$

$[*13·12] \quad \supset \vdash : \alpha = t'x \cup t'y. x \neq y. \supset. \alpha \neq t'x. \alpha \neq t'y \quad (2)$

$\vdash. (1). (2). \supset \vdash :: \alpha = t'x \cup t'y. x \neq y. \supset :$

$\beta \in \alpha. \mathfrak{H}! \beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = t'x. \vee. \beta = t'y :$

$[*31·235] \quad \equiv : (\mathfrak{H}z). z \in \alpha. \beta = t'z :$

$[*37·6] \quad \equiv : \beta \in t''\alpha \quad (3)$

$\vdash. (3). *11·11·35. *54·101. \supset \vdash. \text{Prop}$

***54·43.** $\vdash : \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash. *54·26. \supset \vdash : \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. x \neq y.$

$[*51·231] \quad \equiv. t'x \cap t'y = \Lambda.$

$[*13·12] \quad \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash. (1). *11·11·35. \supset$

$\vdash : (\mathfrak{H}x, y). \alpha = t'x. \beta = t'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash. (2). *11·54. *52·1. \supset \vdash. \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$

엄밀하다

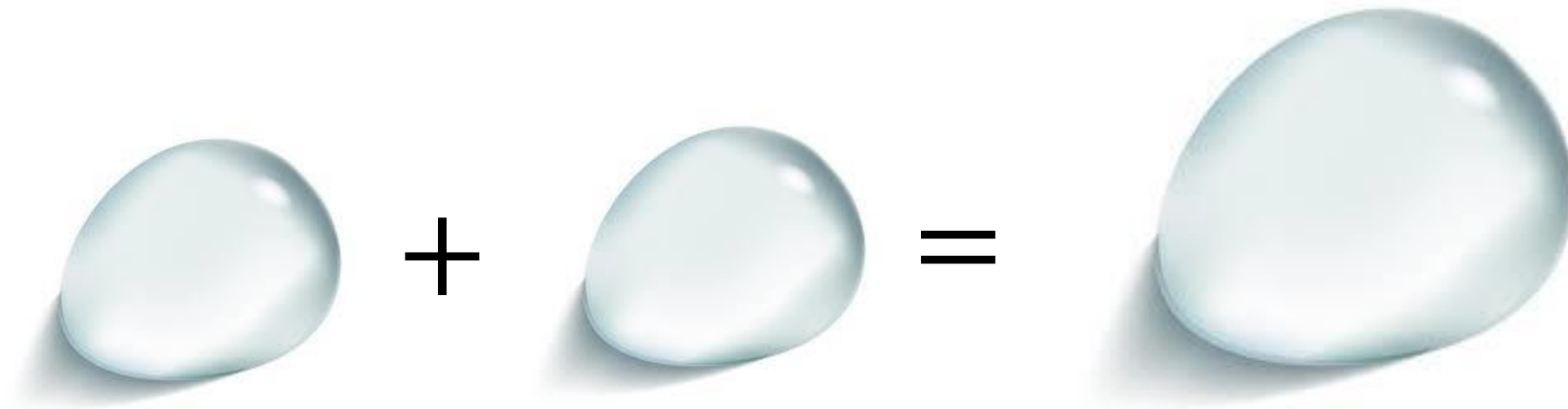
논리적으로 오류 없이 명확함을 의미

Ex) 함수의 극한은 "한없이 가까이 " 가 명확하지 않
으므로 엄밀하지 않다고 하는 것

왜 엄밀해야 하는가?

수학은 논리적 토대 위에서 세워진 학문임

어떠한 자연 현상을 명확하게 기술해야 하는 관점
에선 필수불가결함



물방울에서의 $1+1=1$ 은 '크기'를 고려하지 않았으므로, 이는 일반적으로 수용하기 어려움

$$1 + 1 = 2$$

덧셈?

$$2 \oplus 3$$

$$f(x) \oplus g(x)$$

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$$

같은 덧셈?

덧셈?

애초에 덧셈이 무엇인지 정의한 적이 없음

연산의 정의부터 다시 살펴보자!

이항연산의 정의

$*: S \times S \rightarrow S$ denoted by

$$* (a, b) = a * b$$

즉, S 라는 집합에서 두 원소를 뽑고 함수에 대입했을 때 그 값이 S 의 원소이면, 그 함수를 이항연산이라 한다.

예시

자연수 집합($= \mathbb{N}$)에서의 $+$, $\times$

ex. $1 + 2 = 3$, $4 \times 5 = 20$:자연수

정수 집합($= \mathbb{Z}$)에서의 $+$, $\times$, $-$

ex. $2 \times (-3) = -6$, $4 - 11 = -7$:정수

And, or 게이트

$S = \{0, 1\}$ 이라 할 때

INPUT		OUTPUT
A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

INPUT		OUTPUT
A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

아닌 예시

$\mathbb{N}$ 에서의 $-$

$1 - 3 = -2$: 자연수가 아님

이항 구조

집합 S 와 S 위에서 정의된 이항연산 $*$ 으로 이루어진 대수적 구조 $(S, *)$

Ex) $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \times)$ 등등

결합 법칙 (associative law)

이항 구조 $(S, *)$ 와 임의의 $a, b, c \in S$ 에 대해

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

임을 의미

이 경우, 괄호를 생략하여 $a * b * c$ 라고 씀

예시

$(\mathbb{N}, \times), (\mathbb{Z}, +)$

$$10 \div 2(4 + 1)$$

나눗셈은 결합법칙이 성립하지 않음

→ 논쟁이 발생하게 된 계기임

교환법칙(commutative law)

이항 구조 $(S, *)$ 와 임의의 $a, b \in S$ 에 대해

$$a * b = b * a$$

임을 의미

아닌 예시

행렬곱

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

덧셈은 무엇인가?

이항구조 $(S, *)$ 가 결합법칙과 교환법칙을 만족할 때, 그 연산을 덧셈이라고 하며, 기호로 '+'를 씀

즉, '기호'만 같을 뿐 실제로는 다 다른 연산

예시

다항식의 덧셈

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

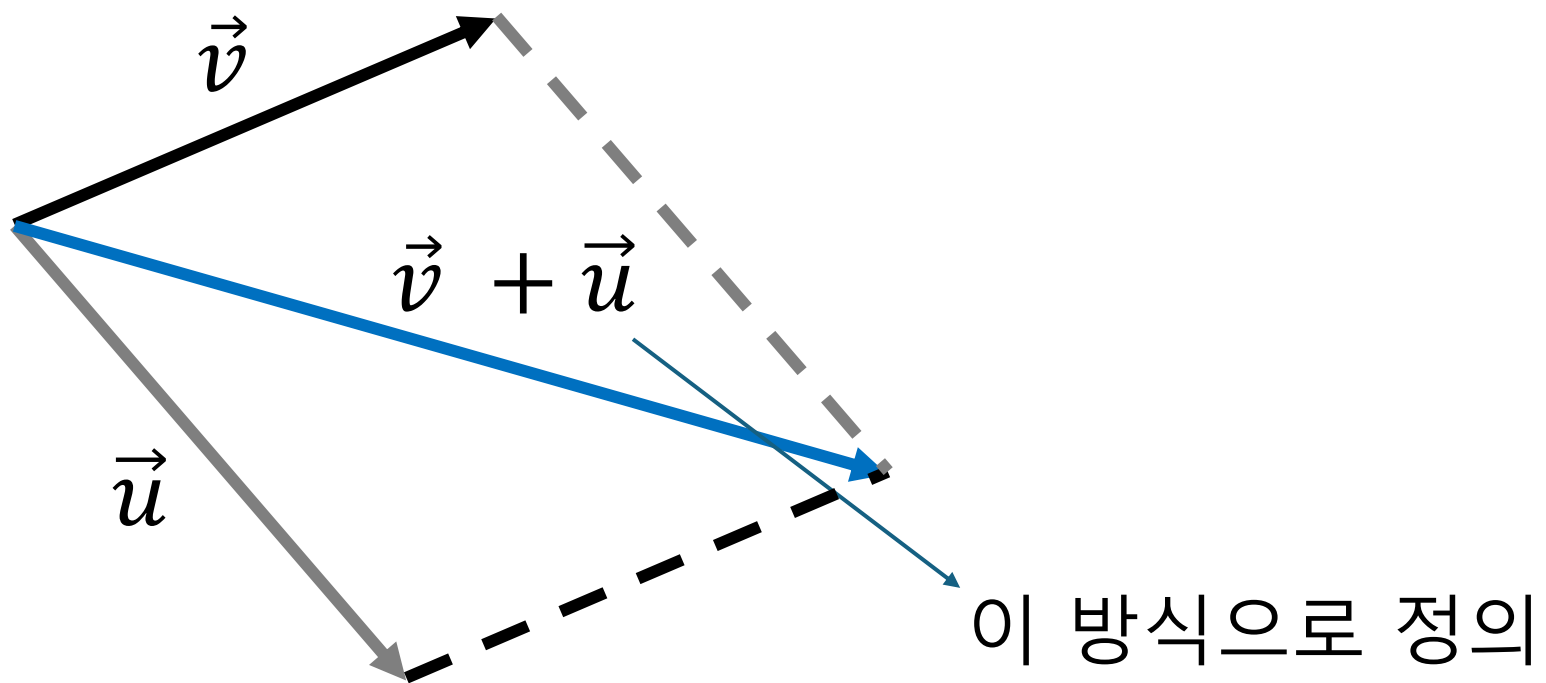
$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_0 + b_0)$$



이 방식으로 다항식의 덧셈을 정의

예시

벡터의 덧셈



$$1 + 1 = 0$$

$S = \{0, 1\}$ 이라 하고, 다음과 같이 연산이 정의된다고 하자

+	0	1
0	0	1
1	1	0

또는, 더한 후 2로 나눈 나머지

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$(0 + 1) + 0 = 0 + (1 + 0) = 1, \quad (0 + 1) + 1 = 0 + (1 + 1) = 0$$

$$(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0) = 0, \quad (0 + 0) + 1 = 0 + (0 + 1) = 1$$

$$(1 + 0) + 0 = 1 + (0 + 0) = 1, \quad (1 + 0) + 1 = 1 + (0 + 1) = 0$$

$$(1 + 1) + 0 = 1 + (1 + 0) = 0, \quad (1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1) = 1$$

즉, 교환법칙과 결합법칙을 만족하므로 $+$ 를 쓸 수
있음

따라서 이 경우, $1 + 1 = 0$

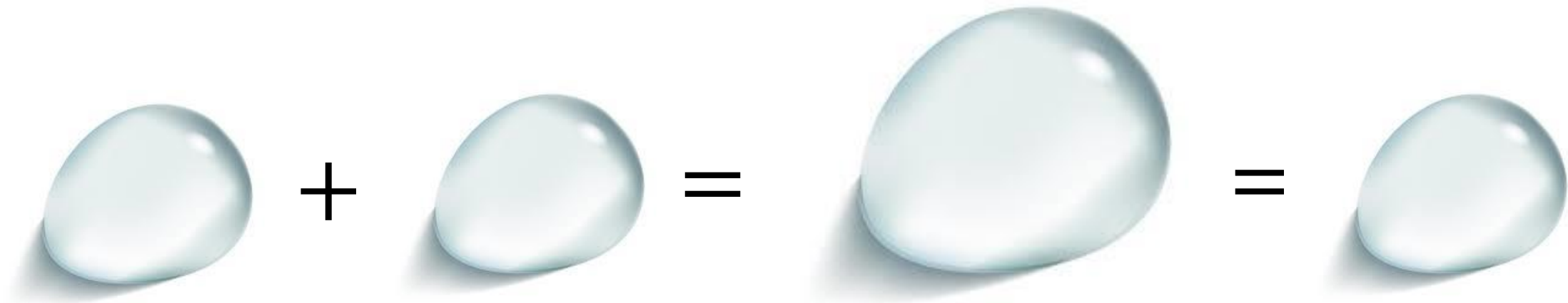
$$1 + 1 = 1$$

And 게이트

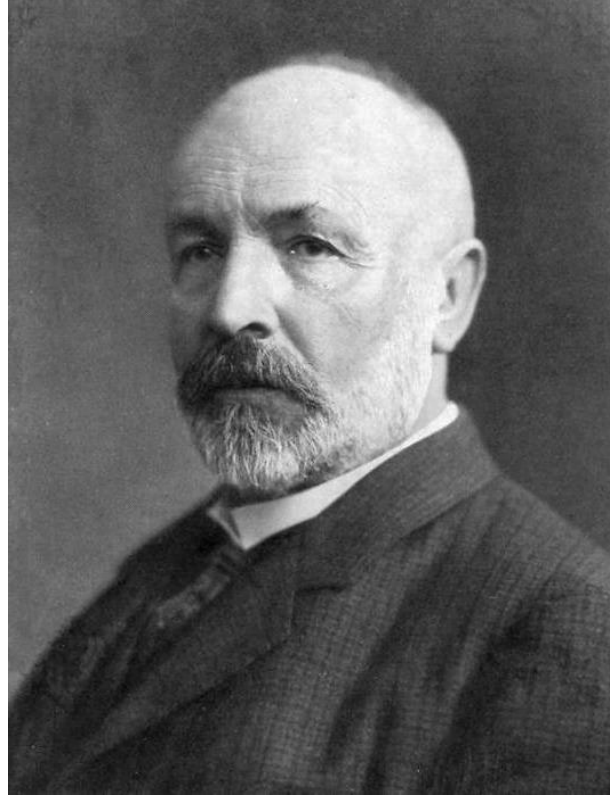
INPUT		OUTPUT
A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Or 게이트

INPUT		OUTPUT
A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



크기를 신경쓰지 않는다면 이는 $1 + 1 = 1$ 이라고 볼 수 있음



수학의 본질은 그 자유로움에 있다.
-게오르크 칸토어

감사합니다!