

무작위와 무한

Randomness and Infinity

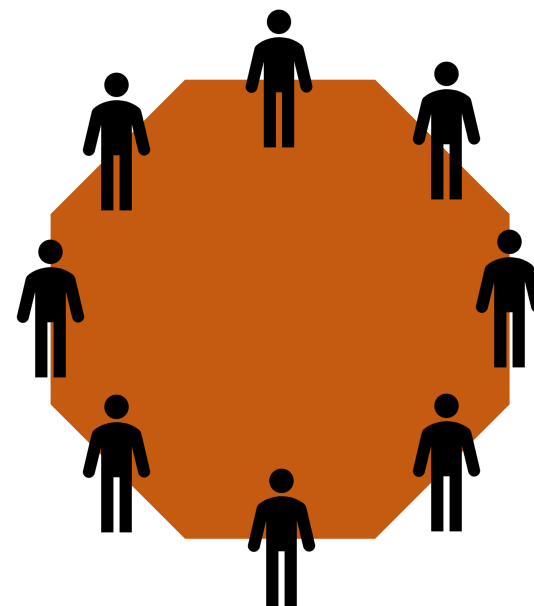
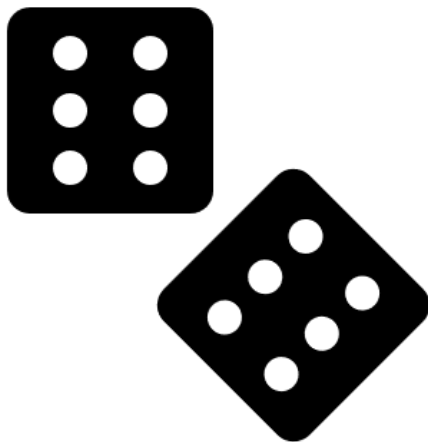
홍정명



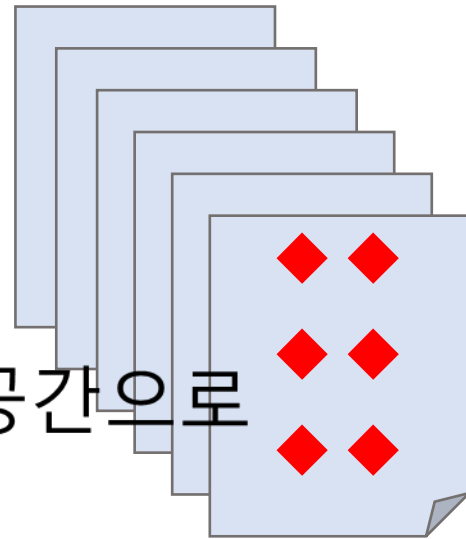
머리말: 간단 퀴즈

주사위를 이용하여 8명 가운데 1명을 뽑아야 하는 상황이고, 각각의 사람이 뽑힐 확률이 모두 $1/8$ 로 같아야 한다.

어떤 경우에도 최대 n 번만 주사위를 굴리면 8명 중 1명이 공평하게 뽑히는 것을 보장하려 할 때, n 을 최소로 하고 싶다면 어떤 방법을 써야 할까?



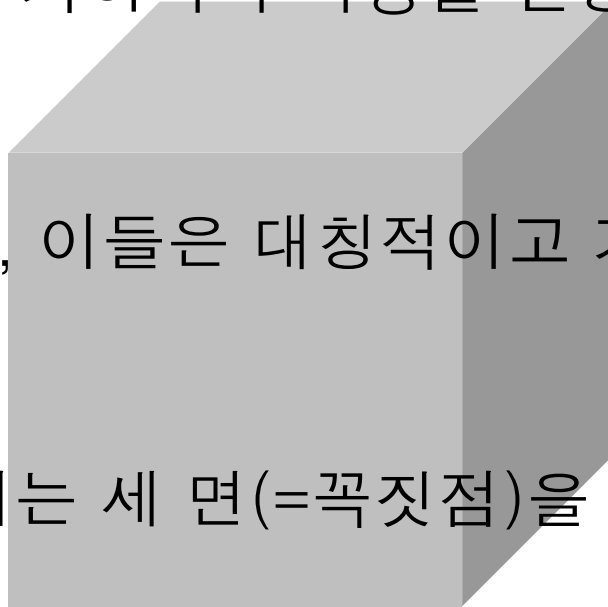
머리말: 간단 퀴즈 - 해답



- 주사위를 같은 확률의 근원사건 6개로 이루어진 표본공간으로 보는 관점 (6장의 카드, 제비뽑기 꾸러미 등과 같음)
- 1번 던져서 절반(4명)을 골라내고, 2번째로 던져 또 절반(2명)을 골라내고, 3번째로 던져 남은 2명 중 1명을 결정
- $2^3 = 8$ (2는 6의 약수)
- $6^3 = 8n = 8 \times 27$

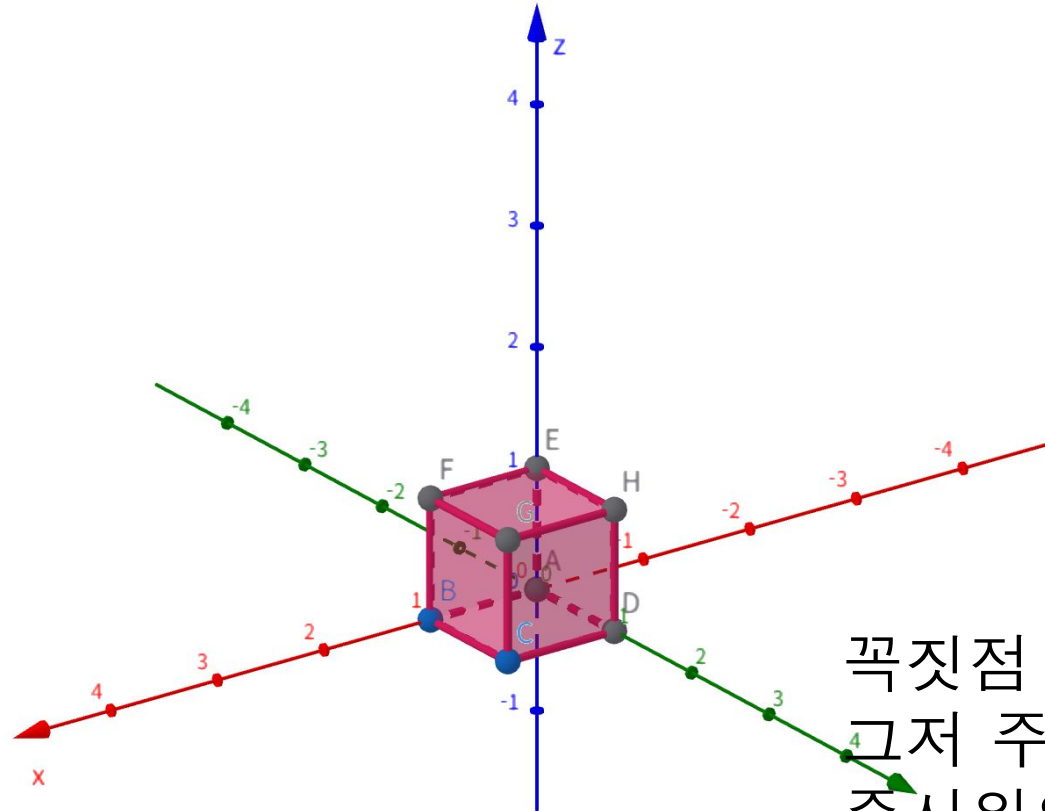
머리말: 간단 퀴즈 - 해답

- 주사위의 정육면체로서의 기하학적 특징을 인정하고 이를 쓸 수 있다고 보는 관점
- 정육면체의 꼭짓점이 8개, 이들은 대칭적이고 기하학적으로 동등함, 각각 3면과 맞닿아 있음
- 주사위를 1번 굴리고 보이는 세 면(=꼭짓점)을 이용해 8명 중 1명을 결정
- 보이는 면이 셋보다 적을 때를 대비해 세 면 결정 규칙 미리 설정, 또는 항상 세 면이 보이도록 환경 조정



머리말: 간단 퀴즈 - 해답

공간, 대상,
관측자



꼭짓점 중 하나를 결정할 때
그저 주사위를 보는 것 이외에는
주사위의 운동상태에 영향을
미치는 그 어떤 행위도
할 필요가 없다(!)

이 문제를 알게 된 곳:
B't X (비트 엑스) - 쿠루마다 마사미

무작위성과 동일성

확률의 고전적 정의

피에르시몽 라플라스 (Pierre-Simon Laplace) (1749–1827), 다니엘 베르누이 (Daniel Bernoulli) (1700–1782) 등

- 사건의 경우의 수 / 가능한 모든 경우의 수
- 각 경우의 가능성이 같을 때

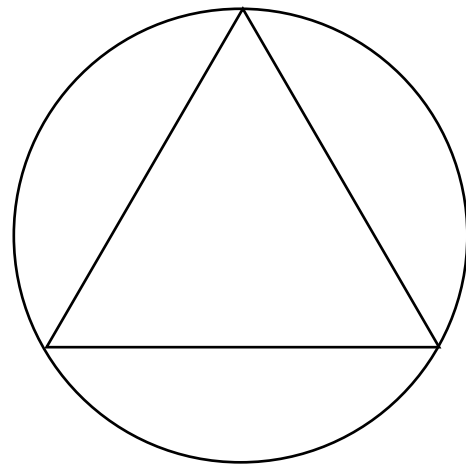
무차별의 원리

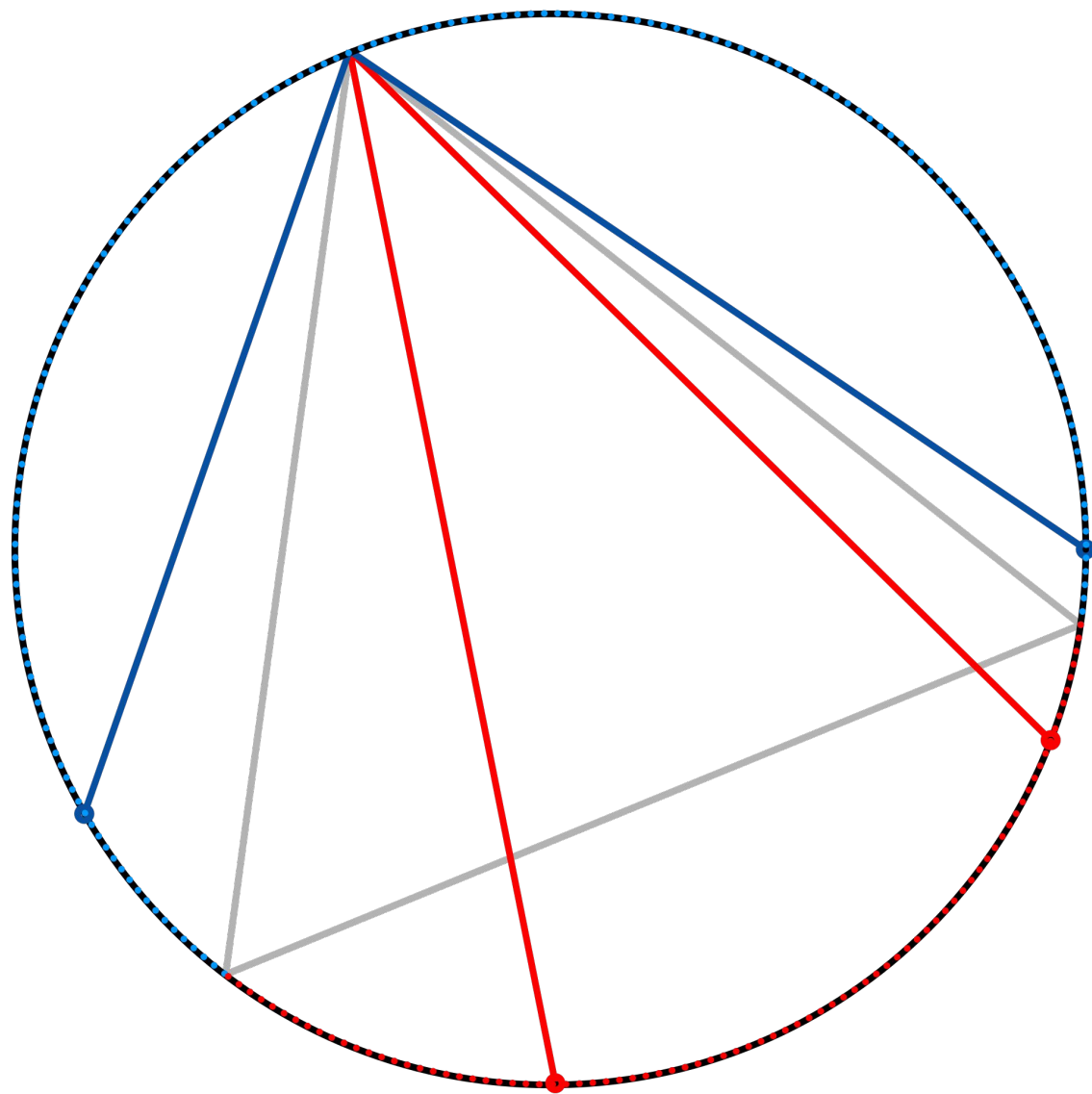
무작위성과 균일성

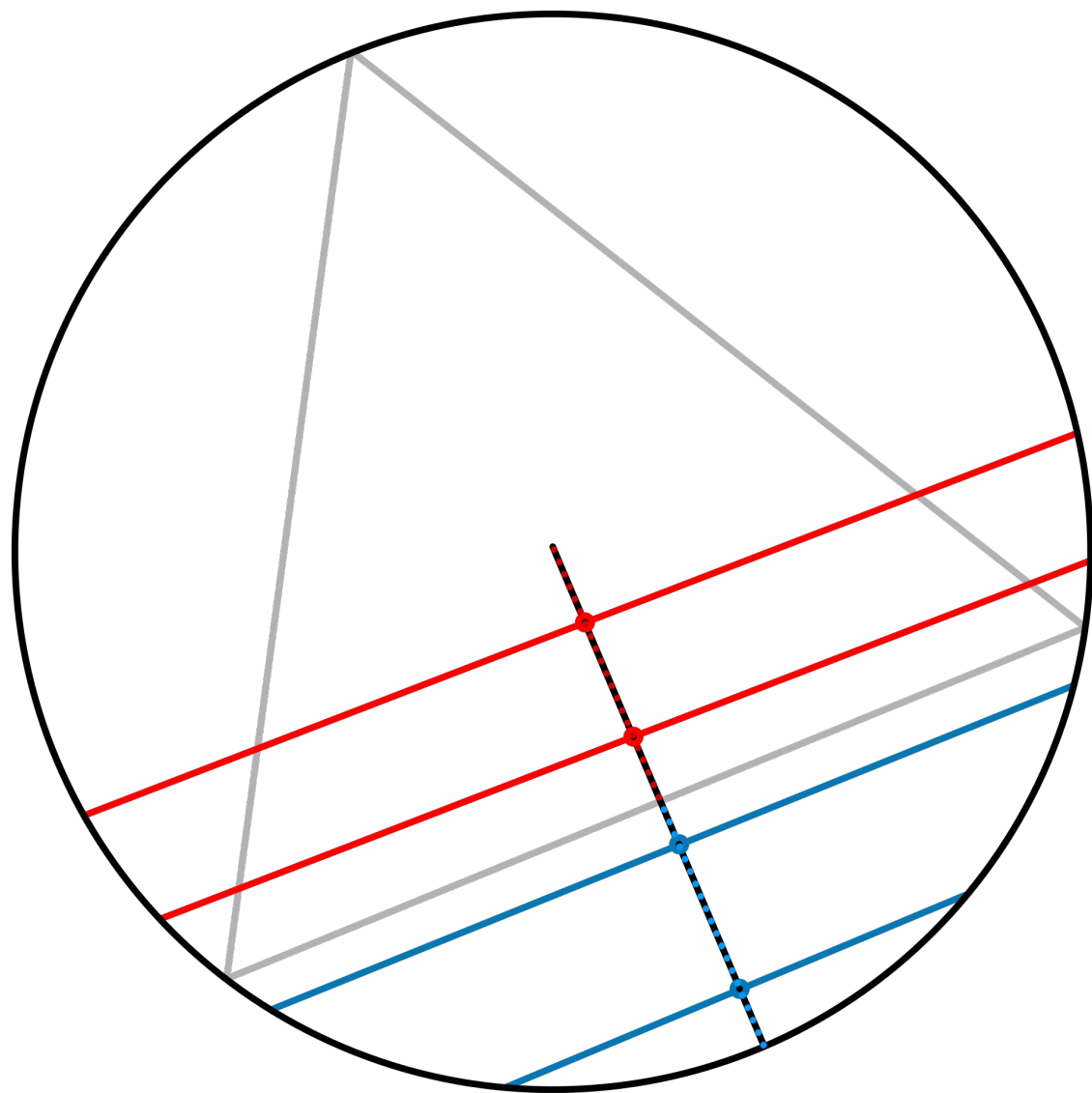
베르트랑의 역설 (Bertrand Paradox)

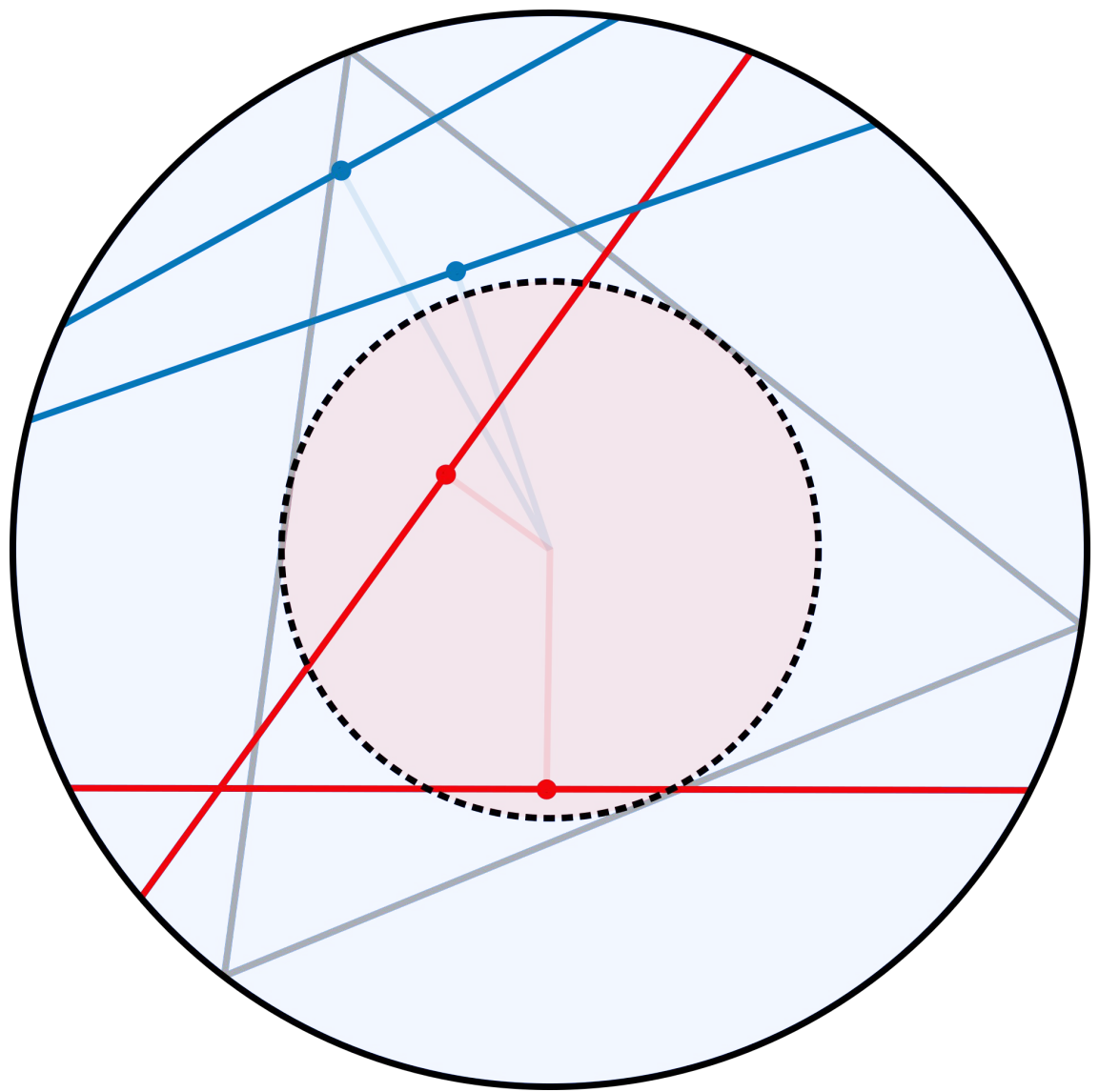
Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités* (1889)

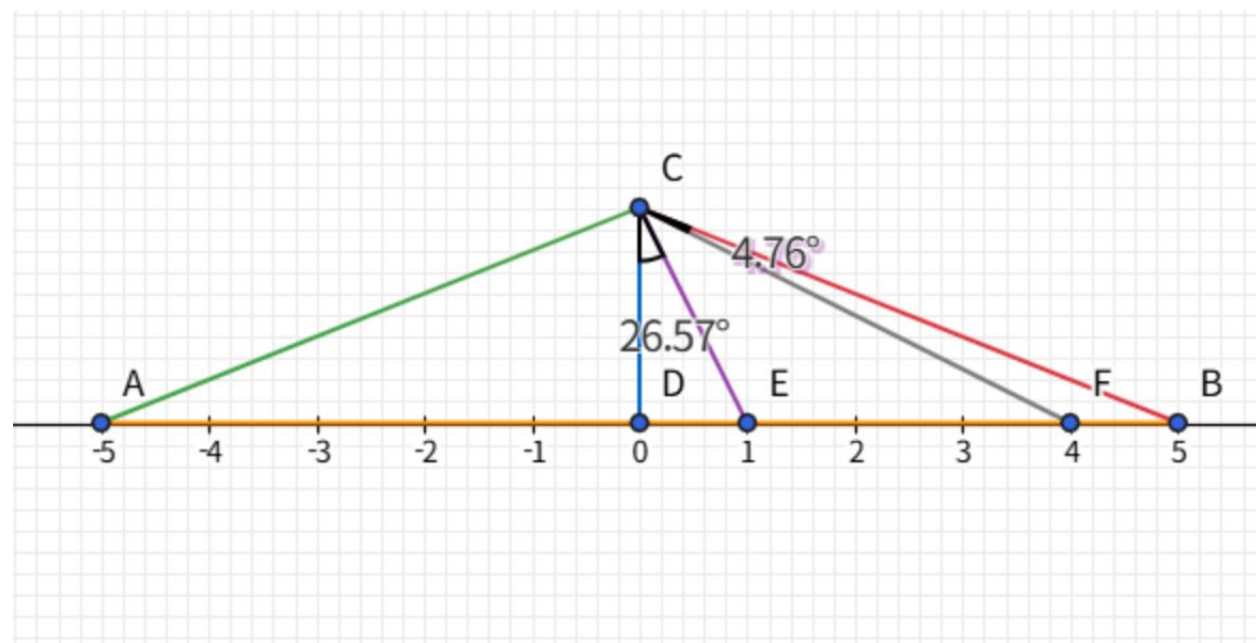
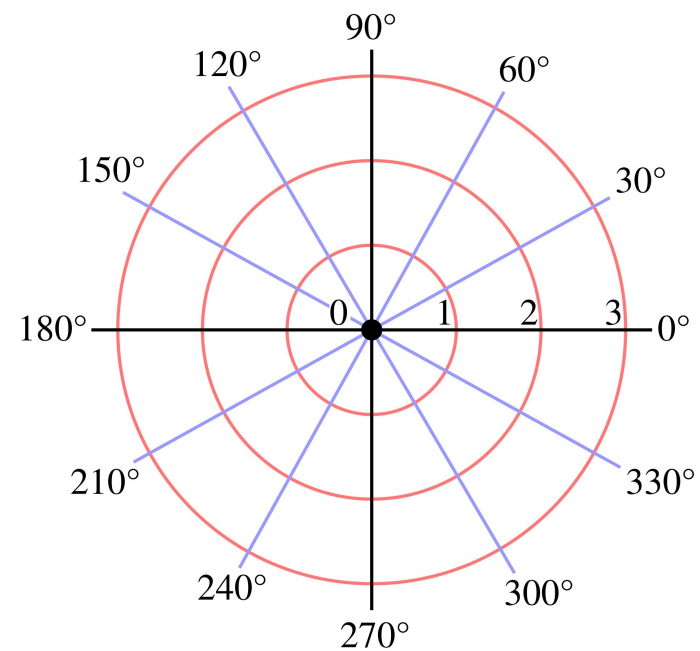
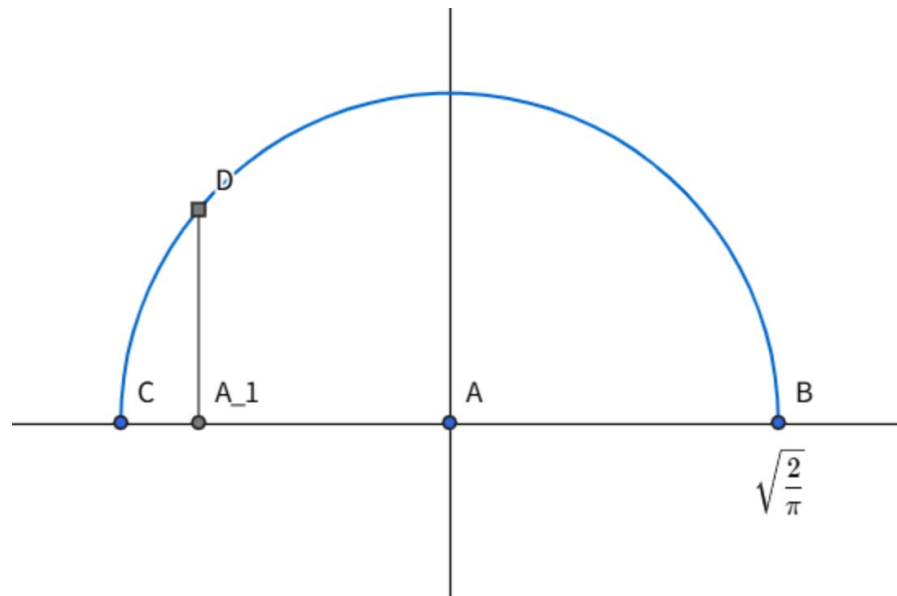
어떤 원의 현의 길이가 그 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이보다 길 확률은?

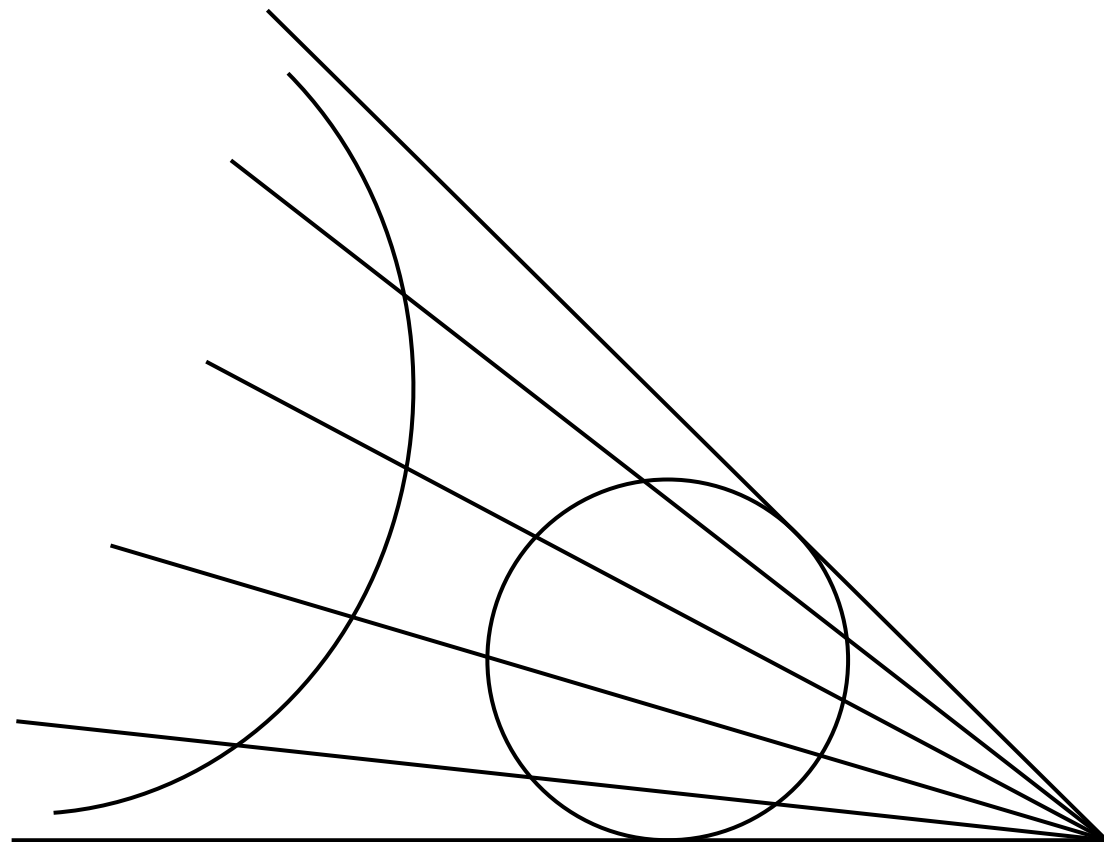
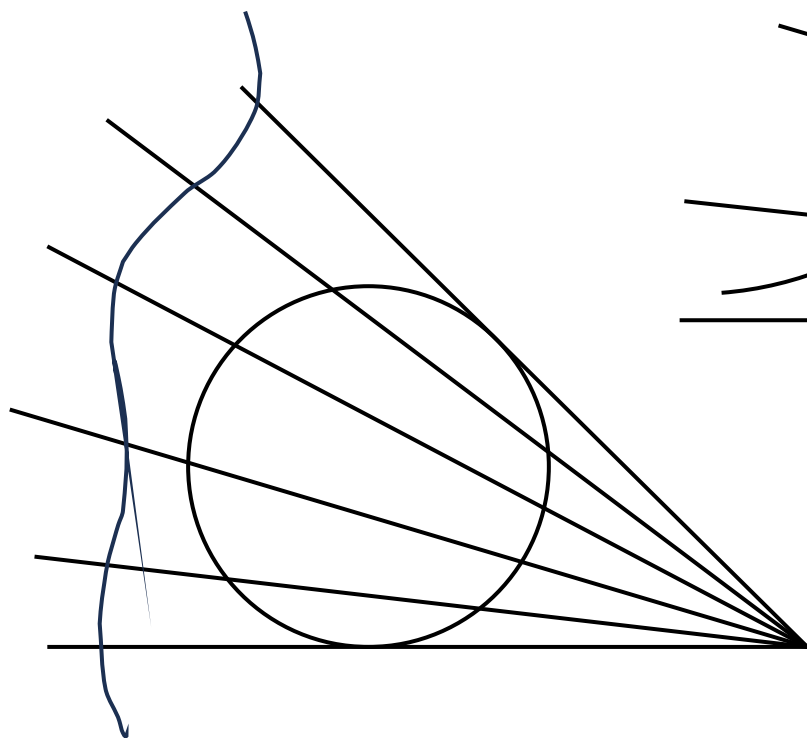
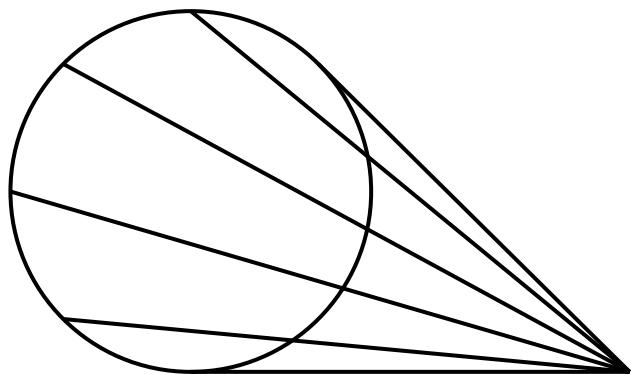










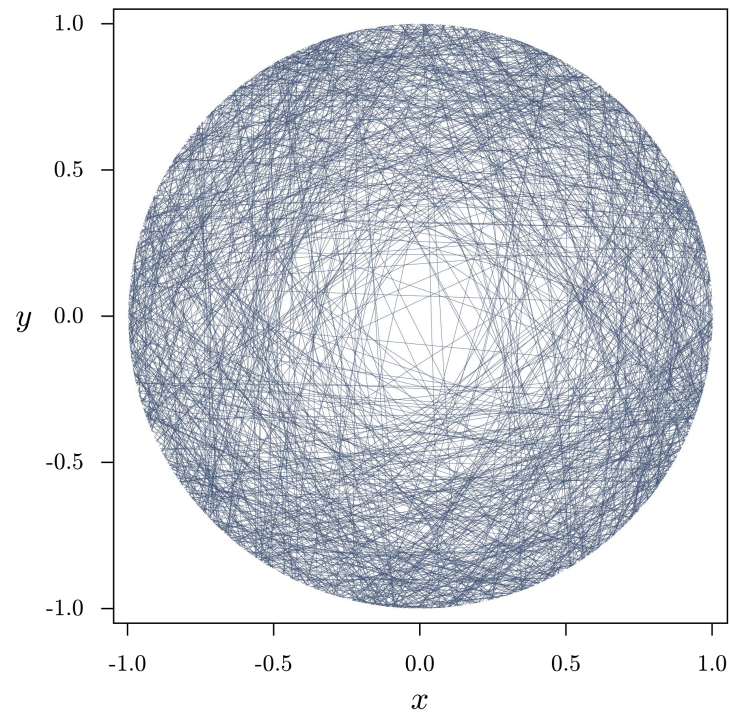
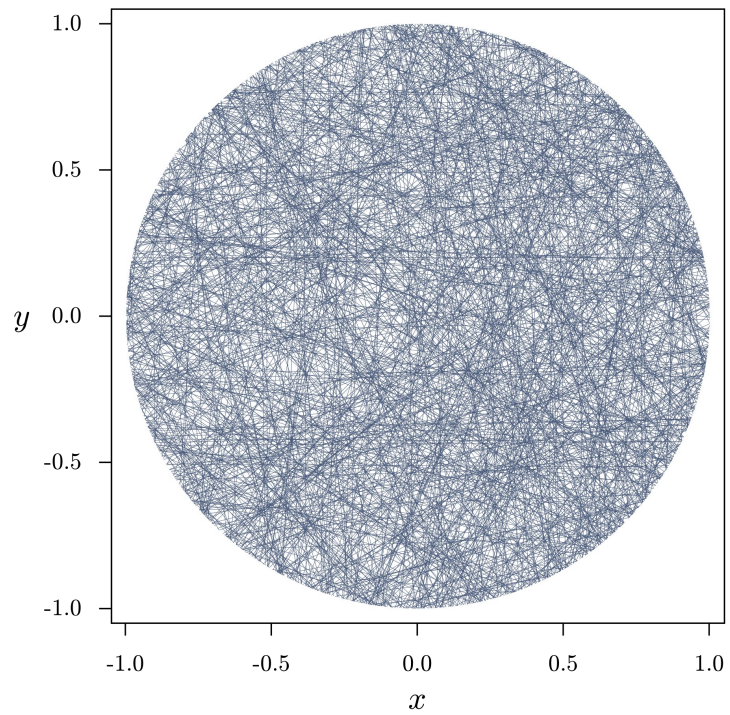
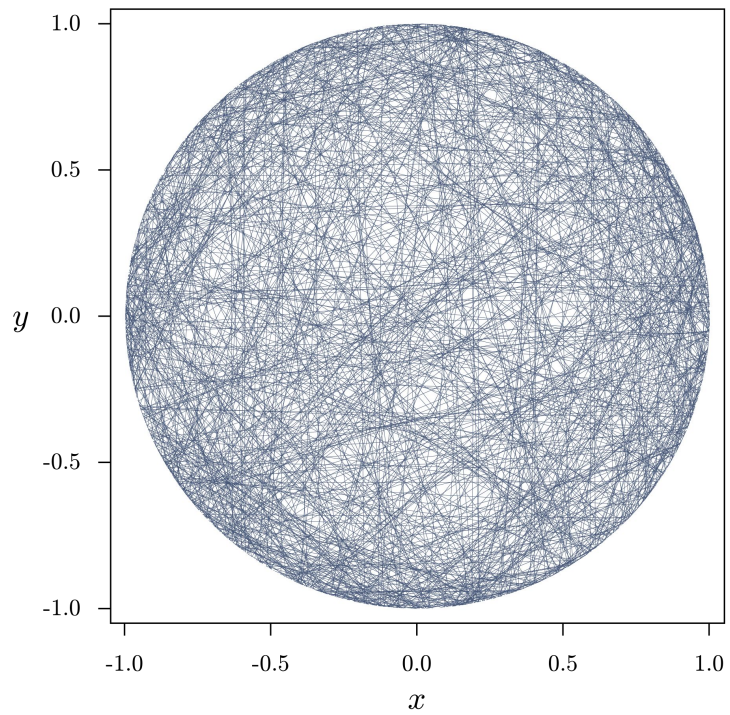


무작위와 무한

- 현을 고르는 방법에 따라 달라지는 결과
- “무한한 수의 가능한 경우 중에서 무작위로 선택하라는 말은 무엇을 해야 할지에 대한 충분한 지표가 아니다.” – Joseph Bertrand

[To be told] to choose at random, between an infinite number of possible cases, is not a sufficient indication [of what to do]

(Translated by Nicholas Shackel, *Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference*)



무작위와 비교우위

- 대칭성(불변성) – 원, 직선 같은 요소의 크기, 위치, 방향(회전) 등 변환에 무관하게 일정
- 현실에서의 실험적 구현
- 공리적 확률 부여

무작위성과 엄밀함

●공리적 확률

안드레이 콜모고로프, 1933 (Андрей Николаевич Колмогоров)

집합 Ω – 표본 공간

표본공간의 시그마 대수 $\mathcal{F}$ – 사건공간

사건공간의 원소 A – 사건

사건공간에서 실수 집합으로의(사건 하나에 실수 하나를 대응) 함수 P – 확률

대수 – 기본개념

시그마 대수 – 정의에 쓰는 개념

보렐 대수 – 실수집합에서 확률을 다룰 때 유용하게 쓰이는 개념

•

대수(체, 마당, 장)(Algebra(Field)):

집합 S 의 부분집합의 집합(S 속의 집합족)(멱집합의 부분집합) $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$)

$$(A \in \mathcal{F}) \wedge (B \in \mathcal{F}) \rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{F}$$
$$A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

예: $S = \{1, 2, 3\}$ 일 때 $\{\emptyset, S, \{1\}, \{2, 3\}\}$ 은 S 의 대수

σ -대수 (시그마 대수)

대수의 원소를 어떻게 고르든 간에 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

위의 $(A \in \mathcal{F}) \wedge (B \in \mathcal{F}) \rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{F}$ 와 비슷

유한집합에서는 대수이면 시그마 대수

-

보렐 대수

실수 집합 $\mathbb{R}$ 이 표본공간

열린 구간 (a, b) 를 모두 포함하는 가장 작은 σ -대수

홀원소 집합: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$

무작위성과 확률

1) 임의의 사건 A 에 대하여 $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A_i \cap A_j = \emptyset \rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

σ -가법성 (σ -additivity)

가법성: $f(a + b) = f(a) + f(b)$

- $P(\emptyset) = 0$

- $A_i \cap A_j = \emptyset \rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

- $P(A) \leq 1$

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

- $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$

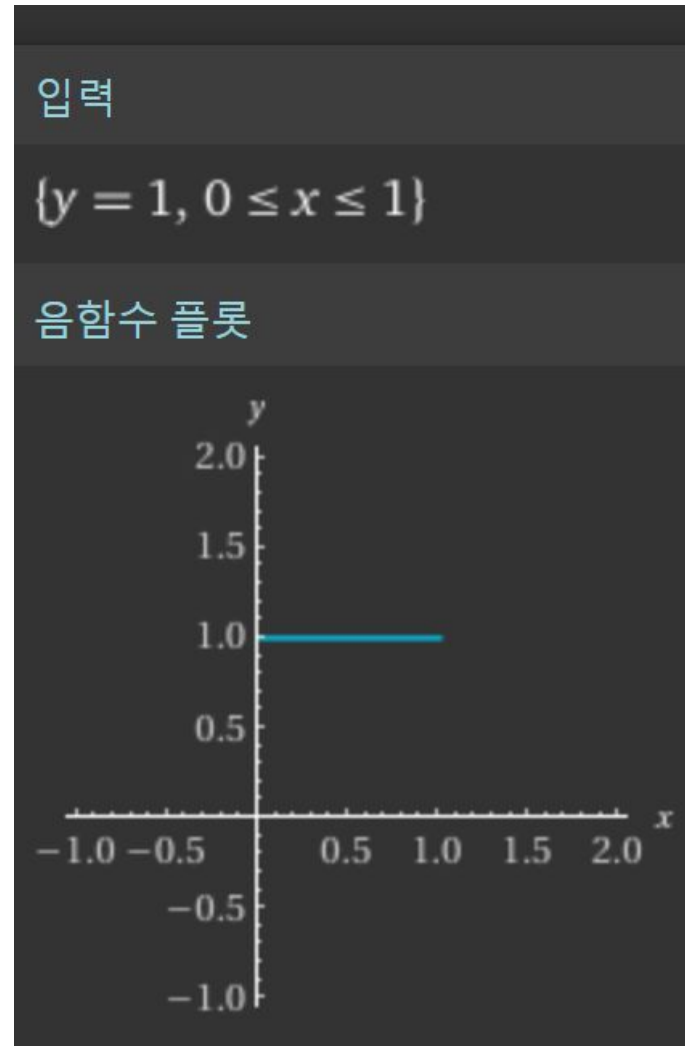
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

표본공간과 공사건

여사건

무작위성과 실재성

확률 0과 확률 1



무작위적 질의응답, 첨언, 보완, 주장, 반박, 여담...

Q&A + α