

# 적분 계산 테크닉과 Feynman's Trick

수학과, 박도현

2025.5.14

# Motivation

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$



적분은 미분의 역과정

$$\int_a^b f(x) dx$$



적분은 미분의 역과정



미적분의 기본정리

## 미적분의 기본정리

함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 (리만)적분가능하고

$$F' = f$$

이면

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

가 성립한다.

## 미적분의 기본정리

함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 가 (리만)적분가능하고

$$F' = f$$

이면

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

가 성립한다.

Q: “모든” 미분 공식  $\implies$  “모든” 적분 공식??

Table: 미분 공식 표

| $f$       | $f'$          | $f$            | $f'$                      |
|-----------|---------------|----------------|---------------------------|
| 1         | 0             | $\sin^{-1} x$  | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $x^r$     | $rx^{r-1}$    | $\cos^{-1} x$  | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $e^x$     | $e^x$         | $\tan^{-1}(x)$ | $\frac{1}{x^2+1}$         |
| $\ln  x $ | $\frac{1}{x}$ | $\sinh x$      | $\cosh x$                 |
| $\sin x$  | $\cos x$      | $\cosh x$      | $\sinh x$                 |
| $\cos x$  | $-\sin x$     | $\tanh x$      | $\operatorname{sech}^2 x$ |
| $\tan x$  | $\sec^2 x$    | $\vdots$       | $\vdots$                  |

Table: 미분 공식 표

| $f$       | $f'$          | $f$            | $f'$                      |
|-----------|---------------|----------------|---------------------------|
| 1         | 0             | $\sin^{-1} x$  | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $x^r$     | $rx^{r-1}$    | $\cos^{-1} x$  | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $e^x$     | $e^x$         | $\tan^{-1}(x)$ | $\frac{1}{x^2+1}$         |
| $\ln  x $ | $\frac{1}{x}$ | $\sinh x$      | $\cosh x$                 |
| $\sin x$  | $\cos x$      | $\cosh x$      | $\sinh x$                 |
| $\cos x$  | $-\sin x$     | $\tanh x$      | $\operatorname{sech}^2 x$ |
| $\tan x$  | $\sec^2 x$    | $\vdots$       | $\vdots$                  |

$2x$ ,  $\sin x + \cos x$ ,  $x^2 e^x$ 를 미분하는 공식은??

## 미분의 성질

두 함수  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 이 점  $x$ 에서 미분가능하면  $f + g, fg, f/g$ 는  $x$ 에서 미분가능하고

$$(가) \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(나) \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(다) \quad (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{단, } g(x) \neq 0)$$

## 미분의 성질

두 함수  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 이 점  $x$ 에서 미분가능하면  $f + g, fg, f/g$ 는  $x$ 에서 미분가능하고

$$(가) \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(나) \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(다) \quad (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{단, } g(x) \neq 0)$$



좀 더 많은 종류의 함수들을 적분 계산 가능!

# Motivation

| $f$       | $f'$          | $f$            | $f'$                      |
|-----------|---------------|----------------|---------------------------|
| 1         | 0             | $\sin^{-1} x$  | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $x^r$     | $rx^{r-1}$    | $\cos^{-1} x$  | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $e^x$     | $e^x$         | $\tan^{-1}(x)$ | $\frac{1}{x^2+1}$         |
| $\ln  x $ | $\frac{1}{x}$ | $\sinh x$      | $\cosh x$                 |
| $\sin x$  | $\cos x$      | $\cosh x$      | $\sinh x$                 |
| $\cos x$  | $-\sin x$     | $\tanh x$      | $\operatorname{sech}^2 x$ |
| $\tan x$  | $\sec^2 x$    | $\vdots$       | $\vdots$                  |

$\tan x$ 나  $\ln x$ 의 적분값은?

# Motivation

| $f$       | $f'$          | $f$            | $f'$                      |
|-----------|---------------|----------------|---------------------------|
| 1         | 0             | $\sin^{-1} x$  | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $x^r$     | $rx^{r-1}$    | $\cos^{-1} x$  | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $e^x$     | $e^x$         | $\tan^{-1}(x)$ | $\frac{1}{x^2+1}$         |
| $\ln  x $ | $\frac{1}{x}$ | $\sinh x$      | $\cosh x$                 |
| $\sin x$  | $\cos x$      | $\cosh x$      | $\sinh x$                 |
| $\cos x$  | $-\sin x$     | $\tanh x$      | $\operatorname{sech}^2 x$ |
| $\tan x$  | $\sec^2 x$    | $\vdots$       | $\vdots$                  |

$\tan x$ 나  $\ln x$ 의 적분값은?



적분 테크닉: 치환적분, 부분적분

(가) 치환적분:  $\tan x$  적분  $u := \cos x \implies du = -\sin x dx$

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} \\ &= -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C\end{aligned}$$

(나) 부분적분:  $\ln x$  적분

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - x + C$$

미분 공식 (부정적분 공식), 치환적분, 부분적분으로  
모든 함수 적분 계산 가능??

미분 공식 (부정적분 공식), 치환적분, 부분적분으로  
모든 함수 적분 계산 가능??

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

미분 공식 (부정적분 공식), 치환적분, 부분적분으로  
모든 함수 적분 계산 가능??

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

부분적분으로 접근해보자.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{x} dx &= \sin x \cdot \ln x - \int \cos x \ln x dx \\ &= \sin x \cdot \ln x - \left( \ln x \cdot \sin x - \int \frac{\sin x}{x} dx \right) = \int \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

치환적분으로 접근해보자.  $u = \sin x$ 하면 적분범위가 치환 불가능.

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

치환적분으로 접근해보자.  $u = \sin x$ 하면 적분범위가 치환 불가능.  
 $u = 1/x$ 라 하면  $du = -dx/x^2$ ,  $dx = -du/u^2$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(1/u)}{u} du \quad ??$$

# Motivation

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

치환적분으로 접근해보자.  $u = \sin x$ 하면 적분범위가 치환 불가능.  
 $u = 1/x$ 라 하면  $du = -dx/x^2$ ,  $dx = -du/u^2$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(1/u)}{u} du \quad ??$$

$u = \ln x$ 라 하면  $du = dx/x$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(e^u) du \quad ??$$

# Motivation

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

치환적분으로 접근해보자.  $u = \sin x$ 하면 적분범위가 치환 불가능.  
 $u = 1/x$ 라 하면  $du = -dx/x^2$ ,  $dx = -du/u^2$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(1/u)}{u} du \quad ??$$

$u = \ln x$ 라 하면  $du = dx/x$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(e^u) du \quad ??$$

어떻게 해야 될까??

# Motivation

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

치환적분으로 접근해보자.  $u = \sin x$ 하면 적분범위가 치환 불가능.  
 $u = 1/x$ 라 하면  $du = -dx/x^2$ ,  $dx = -du/u^2$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(1/u)}{u} du \quad ??$$

$u = \ln x$ 라 하면  $du = dx/x$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(e^u) du \quad ??$$

어떻게 해야 될까?? → **파인만의 트릭**

# Feynman's Trick Introduction

요약: 적분할 때 미분, 적분 교환!

# Feynman's Trick Introduction

요약: 적분할 때 미분, 적분 교환!

Q1. 적분을 하기 위해 미분을 하기?

# Feynman's Trick Introduction

요약: 적분할 때 미분, 적분 교환!

Q1. 적분을 하기 위해 미분을 하기?

Q2. 미분 적분 교환하고 하면 값이 달라진다.

$$\int \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) dt \neq \frac{d}{dt} \int f(t) dt$$

# Feynman's Trick Introduction

요약: 적분할 때 미분, 적분 교환!

Q1. 적분을 하기 위해 미분을 하기?

Q2. 미분 적분 교환하고 하면 값이 달라진다.

$$\int \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) dt \neq \frac{d}{dt} \int f(t) dt$$

매개변수 하나 설정하고, 매개변수에 대해 미분을 하고, 계산.  
그다음 다시 매개변수에 대해 적분해서 값 구하기!

# 예제 1

## Example (Dirichlet Integral)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

# 예제 1

## Example (Dirichlet Integral)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

풀이.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ 라 하자. 주어진 적분은  $f(0)$ 이고,  
 $f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 이므로

# 예제 1

## Example (Dirichlet Integral)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

풀이.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ 라 하자. 주어진 적분은  $f(0)$ 이고,  
 $f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = -\frac{1}{1+t^2} \implies f(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

# 예제 1

## Example (Dirichlet Integral)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

풀이.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ 라 하자. 주어진 적분은  $f(0)$ 이고,  
 $f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = -\frac{1}{1+t^2} \implies f(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2} \\ \therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= f(0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

# Leibniz Integral Rule

## Leibniz Integral Rule

상수  $a < b$ 에 대하여 적분으로 정의된 함수  $f$ 가 다음과 같이 정의될 때

$$f(t) := \int_a^b g(x, t) dx, \quad c \leq t \leq d$$

$g_t = \partial g / \partial t$ 가  $[c, d]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b g(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dx$$

# Leibniz Integral Rule

## Leibniz Integral Rule

상수  $a < b$ 에 대하여 적분으로 정의된 함수  $f$ 가 다음과 같이 정의될 때

$$f(t) := \int_a^b g(x, t) dx, \quad c \leq t \leq d$$

$g_t = \partial g / \partial t$ 가  $[c, d]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b g(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dx$$

증명?

## Leibniz Integral Rule

상수  $a < b$ 에 대하여 적분으로 정의된 함수  $f$ 가 다음과 같이 정의될 때

$$f(t) := \int_a^b g(x, t) dx, \quad c \leq t \leq d$$

$g_t = \partial g / \partial t$ 가  $[c, d]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b g(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dx$$

증명? 균등수렴 or 지배수렴정리 (LDCT)

# Feynman's Trick



# Feynman's Trick



## Feynman's Trick

매개변수  $t$ 를 사용하여 적분을 다음과 같이 변형할 수 있다:

$$\int_a^b g(x) dx \implies f(t) := \int_a^b \hat{g}(x, t) dx$$

이때,  $t = t_0$ 일 때  $f(t_0) = \int_a^b g(x) dx$ 이다.

# 예제 1

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

# 예제 1

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \text{라 하면}$$

# 예제 1

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x} \cdot x dx = \int_0^{\infty} \cos(tx) dx \\ &= \frac{1}{t} \sin(tx) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sin(tx) = \text{DNE} \end{aligned}$$

# 예제 1

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x} \cdot x dx = \int_0^{\infty} \cos(tx) dx \\ &= \frac{1}{t} \sin(tx) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sin(tx) = \text{DNE} \end{aligned}$$

매개변수를 이렇게 잡을 수 없다!

# 예제 1

## Example

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

풀이.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$ 라 하자. 주어진 적분은  $f(0)$ 이고,  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx = -\frac{1}{1+t^2} \implies f(t) = -\arctan t + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

# Algorithm

$\int_a^b g(x)dx$ 를 구하고 싶다!

# Algorithm

$\int_a^b g(x)dx$ 를 구하고 싶다!

Feynman's trick :  $\int_a^b g(x)dx \xrightarrow{*} f(t) := \int_a^b \hat{g}(x, t)dt$

(단,  $f(t_0) = \int_a^b g(x)dx$ 이고,  $f(t_1) = \alpha$ 인  $t_0, t_1$ 를 찾을 수 있다.)

# Algorithm

$\int_a^b g(x)dx$ 를 구하고 싶다!

Feynman's trick :  $\int_a^b g(x)dx \xrightarrow{*} f(t) := \int_a^b \hat{g}(x, t)dt$

(단,  $f(t_0) = \int_a^b g(x)dx$ 이고,  $f(t_1) = \alpha$ 인  $t_0, t_1$ 를 찾을 수 있다.)

$$f'(t) = \int_a^b \hat{g}_t(x, t)dt = G(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} G(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f'(t)dt = f(t_1) - f(t_0) = \alpha - f(t_0)$$

$$\therefore \int_a^b g(x)dx = \alpha - \int_{t_0}^{t_1} G(t)dt$$

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

풀이. 분모에 있는  $\ln x$ 를 없애고 싶다!

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

풀이. 분모에 있는  $\ln x$ 를 없애고 싶다!  $f(t) := \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} e^{-t \ln x} dx$ 라 하자.

$$f(\infty) = 0, \quad f(0) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

풀이. 분모에 있는  $\ln x$ 를 없애고 싶다!  $f(t) := \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} e^{-t \ln x} dx$ 라 하자.

$$f(\infty) = 0, \quad f(0) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^1 (x^2 - 1)x^{-t} dx = \frac{1}{3-t} x^{3-t} - \frac{1}{1-t} x^{-t+1} \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{3-t} + \frac{1}{t-1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3-t} x^{3-t} + \frac{1}{t-1} x^{1-t} \right) \end{aligned}$$

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

풀이. 분모에 있는  $\ln x$ 를 없애고 싶다!  $f(t) := \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} e^{-t \ln x} dx$ 라 하자.

$$f(\infty) = 0, \quad f(0) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^1 (x^2 - 1)x^{-t} dx = \frac{1}{3-t} x^{3-t} - \frac{1}{1-t} x^{-t+1} \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{3-t} + \frac{1}{t-1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3-t} x^{3-t} + \frac{1}{t-1} x^{1-t} \right) \quad ?? \end{aligned}$$

## Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

아이디어:  $\frac{d}{dt}(x^t) = x^t \ln x. \implies f(t) := \int_0^1 \frac{x^{\textcolor{red}{t}} - 1}{\ln x} dx$ . 그러면  $f(0) = 0$  이고, 주어진 적분은  $f(2)$ 이다.

## 예제 2

### Example

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$$

아이디어:  $\frac{d}{dt}(x^t) = x^t \ln x. \implies f(t) := \int_0^1 \frac{x^{\textcolor{red}{t}} - 1}{\ln x} dx$ . 그러면  $f(0) = 0$  이고, 주어진 적분은  $f(2)$ 이다.

$$f'(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$$

$$\implies f(t) = \ln |1+t| + C \implies f(t) = \ln(1+t)$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx = f(2) = \ln 3$$

## Example

$$\int_0^1 \ln x dx$$

## 예제 3

### Example

$$\int_0^1 \ln x dx$$

풀이.  $\frac{d}{dt}(x^t) = x^t \ln x \implies t = 0 \text{이면 } \ln x$

## 예제 3

### Example

$$\int_0^1 \ln x dx$$

풀이.  $\frac{d}{dt}(x^t) = x^t \ln x \implies t = 0$ 이면  $\ln x$

$$f(t) := \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

$$f'(t) = \int_0^1 x^t \ln x dx = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\therefore t = 0 \text{대입} : \int_0^1 \ln x dx = -1$$

## 예제 3

$$f(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

## 예제 3

$$f(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

$$f'(t) = \int_0^1 x^t \ln x dx = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$f''(t) = \int_0^1 x^t (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(t+1)^3}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(t) = \int_0^1 x^t (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}}$$

## 예제 3

$$f(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \quad (t \neq -1)$$

$$f'(t) = \int_0^1 x^t \ln x dx = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$f''(t) = \int_0^1 x^t (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(t+1)^3}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(t) = \int_0^1 x^t (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(t+1)^{n+1}}$$

$$t = 0 \text{ 대입} \implies \int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n! \implies \int_0^1 (-\ln x)^n dx = n!$$

## 예제 3

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx = n!$$

## 예제 3

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx = n!$$

$u = -\ln x$  치환하면  $x = e^{-u}$ ,  $dx = -e^{-u} du$ 이고

$$\int_0^1 (-\ln x)^n dx = \int_{\infty}^0 u^n (-e^{-u}) du = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1)$$

## Example

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx$$

## Example

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = -\frac{1}{t} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{t}$$

## Example

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = -\frac{1}{t} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{t}$$

↓

$$\int_0^{\infty} (-x) e^{-tx} dx = -\frac{1!}{t^2}$$

$$\int_0^{\infty} (-x)^2 e^{-tx} dx = (-1)^2 \frac{2!}{t^3}$$

⋮

$$\int_0^{\infty} (-x)^n e^{-tx} dx = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}$$

## 예제 4

### Example

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = -\frac{1}{t} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{t}$$

↓

$$\int_0^{\infty} (-x) e^{-tx} dx = -\frac{1!}{t^2}$$

$$\int_0^{\infty} (-x)^2 e^{-tx} dx = (-1)^2 \frac{2!}{t^3}$$

⋮

$$\int_0^{\infty} (-x)^n e^{-tx} dx = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}$$

$$t = 1 \text{ 대입} \implies \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! = \Gamma(n+1)$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 1.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$  ( $t > 0$ ). 주어진 적분 =  $f(1)$ ,  $f(\infty) = 0$ .

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

산도 1.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$  ( $t > 0$ ). 주어진 적분 =  $f(1)$ ,  $f(\infty) = 0$ .

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{\infty} -x^2 e^{-tx^2} dx \quad (\text{부분적분 사용}) \\ &= \left. \frac{x}{2t} e^{-tx^2} \right|_0^{\infty} - \frac{1}{2t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = -\frac{1}{2t} f(t) \end{aligned}$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

산도 1.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$  ( $t > 0$ ). 주어진 적분 =  $f(1)$ ,  $f(\infty) = 0$ .

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{\infty} -x^2 e^{-tx^2} dx \quad (\text{부분적분 사용}) \\ &= \left. \frac{x}{2t} e^{-tx^2} \right|_0^{\infty} - \frac{1}{2t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = -\frac{1}{2t} f(t) \\ f'(t) &= -\frac{1}{2t} f(t) \implies f(t) = \frac{1}{2t} e^C \end{aligned}$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx.$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

시도 3.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^2} dx$ 를 이용해보자.

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

시도 3.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^2} dx$ 를 이용해보자.  $\rightarrow$  식 자체가 발산

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

시도 3.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^2} dx$ 를 이용해보자.  $\rightarrow$  식 자체가 발산

시도 4.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx$ 라고 하자.

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

시도 3.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^2} dx$ 를 이용해보자.  $\rightarrow$  식 자체가 발산

시도 4.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx$ 라고 하자. 그러면  $f(\infty) = 0$ ,  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ 이고,

$$f'(t) = - \int_0^{\infty} e^{-t(1+x^2)} dx = -e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$$

## 예제 5

### Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

시도 2.  $f(t) := \int_0^{\infty} e^{-(tx)^2} dx$ . 시도 1과 비슷

시도 3.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^2} dx$ 를 이용해보자.  $\rightarrow$  식 자체가 발산

시도 4.  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx$ 라고 하자. 그러면  $f(\infty) = 0$ ,  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ 이고,

$$f'(t) = - \int_0^{\infty} e^{-t(1+x^2)} dx = -e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$$

$$u = \sqrt{t}x, dx = \frac{1}{\sqrt{t}} du \implies f'(t) = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

여기서  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \implies f(\infty) = 0, f(0) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

여기서  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \implies f(\infty) = 0, f(0) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &= f(\infty) - f(0) = \int_0^{\infty} f'(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx dt = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

## Example (Gaussian Integral)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

여기서  $f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \implies f(\infty) = 0, f(0) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &= f(\infty) - f(0) = \int_0^{\infty} f'(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx dt = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

다시  $t = x^2$  치환. 그러면  $dt = 2x dx$ ,

$$-\frac{\pi}{2} = -2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = -2 \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

## Example

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## Example

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

정리하면 분모를 강제로 만들어 없애주는 발상으로 이 문제를 접근한다.

## Example

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

정리하면 분모를 강제로 만들어 없애주는 발상으로 이 문제를 접근한다.

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \quad (\star)$$

## Example

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

정리하면 분모를 강제로 만들어 없애주는 발상으로 이 문제를 접근한다.

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \quad (*)$$

Q: (\*)에서  $f(1)$ 은 계산할 수 있을까?

## Example

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

정리하면 분모를 강제로 만들어 없애주는 발상으로 이 문제를 접근한다.

$$f(t) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} dx \quad (*)$$

Q: (\*)에서  $f(1)$ 은 계산할 수 있을까? 구할 수 없다!

# 왜 배우지 않을까?

# 왜 배우지 않을까?

(가) 시행착오가 많이 필요하다.

# 왜 배우지 않을까?

(가) 시행착오가 많이 필요하다.

(나) 증명이 까다롭다

# 왜 배우지 않을까?

- (가) 시행착오가 많이 필요하다.
- (나) 증명이 까다롭다 (해석학 선행 필수)

# 왜 배우지 않을까?

- (가) 시행착오가 많이 필요하다.
- (나) 증명이 까다롭다 (해석학 선행 필수)
- (다) 정말 어려운 적분을 풀 때는 심화 대학교 이상의 사전지식이 필요하다.

# 왜 배우지 않을까?

- (가) 시행착오가 많이 필요하다.
- (나) 증명이 까다롭다 (해석학 선행 필수)
- (다) 정말 어려운 적분을 풀 때는 심화 대학교 이상의 사전지식이 필요하다. (예: 미분방정식, 심화 치환적분 테크닉 등)

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

A: 아니다! 예제 1, 예제 5와 같이 부정적분 꼴을 찾을 수 없는 함수들은 모든 정적분의 값을 구할 수 없다.  $\therefore$  **closed-form(닫힌 형태)**가 아니다.

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

A: 아니다! 예제 1, 예제 5와 같이 부정적분 꼴을 찾을 수 없는 함수들은 모든 정적분의 값을 구할 수 없다.  $\therefore$  **closed-form(닫힌 형태)가 아니다.**

(closed-form expression은 유한한 횟수의 기호와 사칙연산  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\sqrt{\cdot}$ , 그리고 초등함수 ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$  등)만으로 나타낸 것이다. 무한합 ( $\sum$ ), 무한곱 ( $\prod$ ), 적분, 극한 등은 포함하지 않는다.)

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

A: 아니다! 예제 1, 예제 5와 같이 부정적분 꼴을 찾을 수 없는 함수들은 모든 정적분의 값을 구할 수 없다.  $\therefore$  **closed-form(닫힌 형태)가 아니다.**

(closed-form expression은 유한한 횃수의 기호와 사칙연산  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\sqrt{\cdot}$ , 그리고 초등함수 ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$  등)만으로 나타낸 것이다. 무한합 ( $\sum$ ), 무한곱 ( $\prod$ ), 적분, 극한 등은 포함하지 않는다.)

→ 이렇게 부정적분을 closed-form으로 찾지 못하는 함수들은 numerical method으로 계산한다. 단, 위 두 예제와 같이 특정 범위에서의 적분값은 구할 수 있다.

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

A: 아니다! 예제 1, 예제 5와 같이 부정적분 꼴을 찾을 수 없는 함수들은 모든 정적분의 값을 구할 수 없다.  $\therefore$  **closed-form(닫힌 형태)가 아니다.**

(closed-form expression은 유한한 횃수의 기호와 사칙연산  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\sqrt{\cdot}$ , 그리고 초등함수 ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$  등)만으로 나타낸 것이다. 무한합 ( $\sum$ ), 무한곱 ( $\prod$ ), 적분, 극한 등은 포함하지 않는다.)

→ 이렇게 부정적분을 closed-form으로 찾지 못하는 함수들은 numerical method으로 계산한다. 단, 위 두 예제와 같이 특정 범위에서의 적분값은 구할 수 있다.

Q. 왜  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$ 는 closed-form이 아닌가?

Q: 파인만의 트릭으로 모든 적분을 계산할 수 있을까?

A: 아니다! 예제 1, 예제 5와 같이 부정적분 꼴을 찾을 수 없는 함수들은 모든 정적분의 값을 구할 수 없다.  $\therefore$  **closed-form(닫힌 형태)가 아니다.**

(closed-form expression은 유한한 횟수의 기호와 사칙연산  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ,  $\sqrt{\cdot}$ , 그리고 초등함수 ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$  등)만으로 나타낸 것이다. 무한합 ( $\sum$ ), 무한곱 ( $\prod$ ), 적분, 극한 등은 포함하지 않는다.)

→ 이렇게 부정적분을 closed-form으로 찾지 못하는 함수들은 numerical method으로 계산한다. 단, 위 두 예제와 같이 특정 범위에서의 적분값은 구할 수 있다.

Q. 왜  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$ 는 closed-form이 아닌가?

Differential Galois Theory.

김성기·김도한·계승혁, **해석개론**, 1995

Stewart, James. **Calculus**. 9th ed., Cengage Learning

Hamza E. Alsamraee, **Advanced Calculus Explored: With Applications in Physics, Chemistry, and Beyond**, 2019.

Rudin, Walter. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill Companies, 1973.

Apostol, Tom M. **Mathematical Analysis**. 2004.

Zaharia Burghilea, **“Feynman’s Trick,”**

<https://zackyyz.github.io/feynman.html>

생새우초밥집, **“수학에서 클로즈드 폼이란?”**

<https://freshrimpsushi.github.io/ko/posts/2576>

감사합니다!