

게임은 수학이다

Mini Metro 게임의 수학적 전략과 알고리즘

2024310862 이재웅

차례 Contents

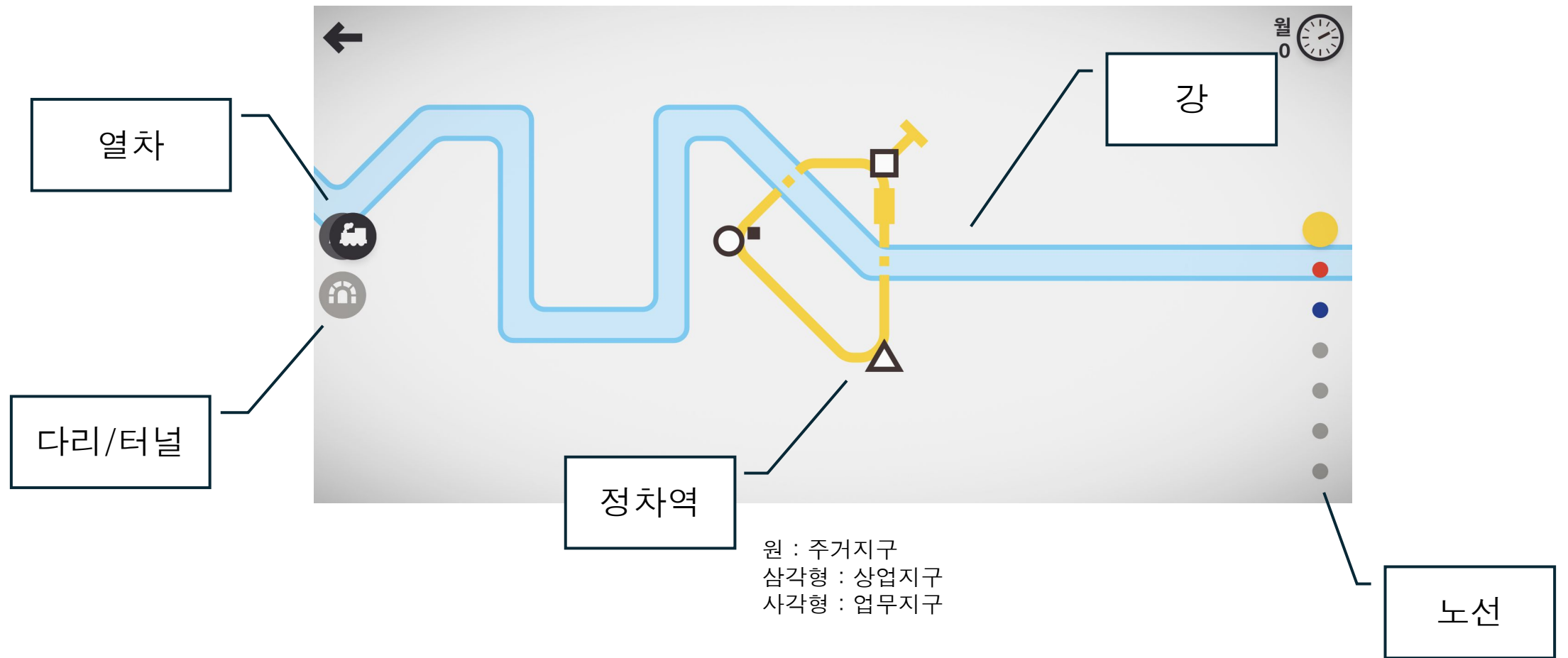
- 게임 소개
- 전략 분석
- 수학의 연관성
- 알고리즘 비교
- 특이 조건
- 결론

게임 소개

- Mini Metro
- 지하철 노선도를 그려 승객을 운송하는 게임
- 역의 최대 수용 인원을 넘긴 채로 인게임 시간 반나절 지나면 게임 오버



게임 소개



전략 분석

• 단순화

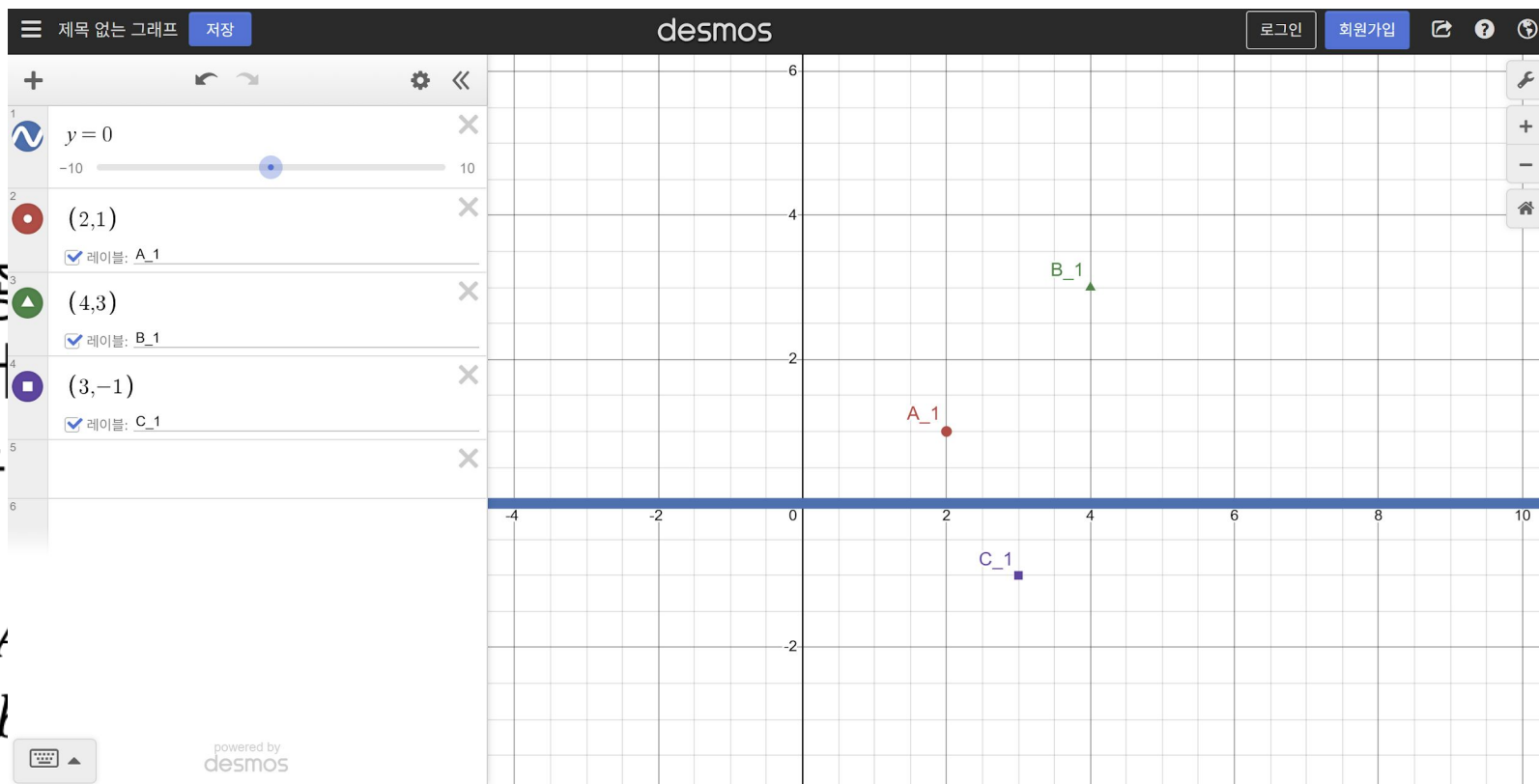
- 정차역과 승객의 종
- 모든 확률 동일하게
- 노선도를 평면좌표

• 문자화

- 정차역 이름 : $A_1, A_2, \dots, A_l$
- 승객 : $a_1, a_2, \dots, a_l$

• 공식화

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c} \quad (\eta : \text{eta/에타})$$



전략 분석

- 수식 설명

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{Ai}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{Bi}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{Ci}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c} \quad (\eta : \text{eta/에타})$$

값이 작을수록
높은 효율!

전략 분석

• 수식 설명

모델 X의
효율도

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c} \quad (\eta : \text{eta/에타})$$

정차역 $A_1, A_2, \dots, A_p$ 의
효율도

$$\eta_{A_i} = \sum \frac{d \cdot L}{t}$$

d : 최근(最近) 정차역까지의 거리
 L : 해당 노선의 총 길이
 t : 해당 노선 위 열차의 수

전략 분석

• 수식 설명

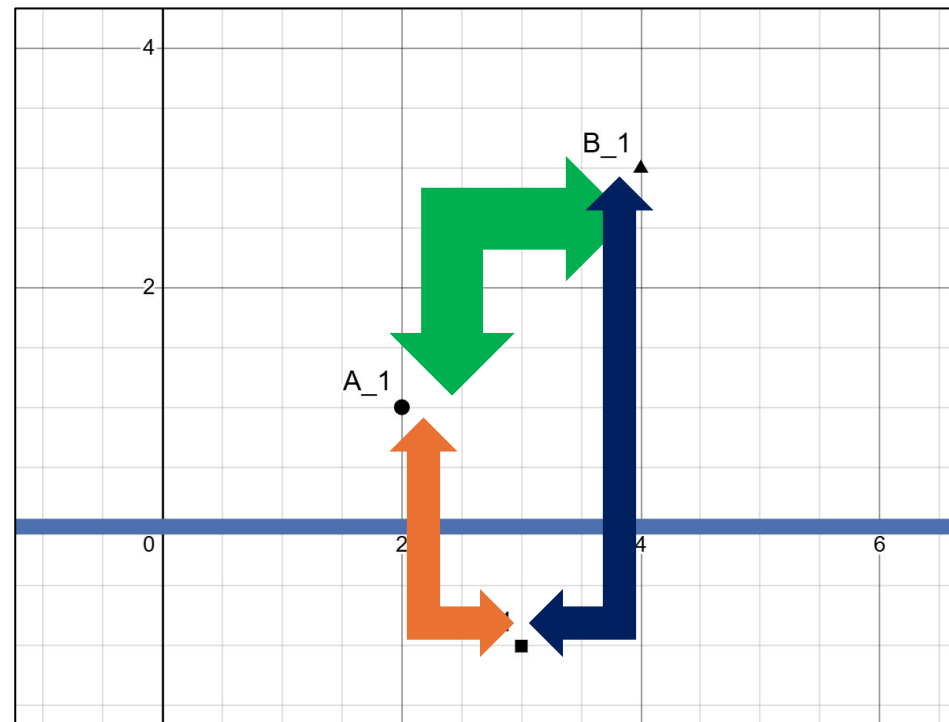
$$\eta_{A_i} = \sum \frac{d \cdot L}{t}$$

d : 최근(最近) 정차역까지의 거리
 L : 해당 노선의 총 길이
 t : 해당 노선 위 열차의 수

$$\eta_{A_1} = \frac{4 \cdot 4}{1} + \frac{3 \cdot 3}{1} = 25$$

$$\eta_{B_1} = \frac{4 \cdot 4}{1} + \frac{5 \cdot 5}{1} = 41$$

$$\eta_{C_1} = ?$$



전략 분석

• 수식 설명

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c} \quad (\eta : \text{eta/에타})$$

각 정치역 효율도의 제곱의 합을
표본 수로 나눈 값의 제곱근

RMS (Root Mean Square) 사용한 이유 :

- 극단적인 표본값의 영향력을 늘릴 수 있음.
- 단위가 동일하므로 해석이 직관적

- └ '표준효율도'라 정의
- └ 표준편차에서 얻은 아이디어

전략 분석

- 수식 설명

정차역 c 의
총 이용자 수

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{Ai}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{Bi}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{Ci}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c} \quad (\eta : \text{eta/에타})$$

정차역 A, B, C 표준효율도의
이용자수에 의한 가중평균

전략 분석

- 수식 정리

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c}$$

$$\eta_{model X} \approx \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{q r q}} \right)$$

전략 분석

- 최종 수식

$$\eta_{model X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c}$$

$$\eta_{model X} \approx \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}} \right)$$

값이 작을수록
높은 효율!

전략 분석

• 수식 예시

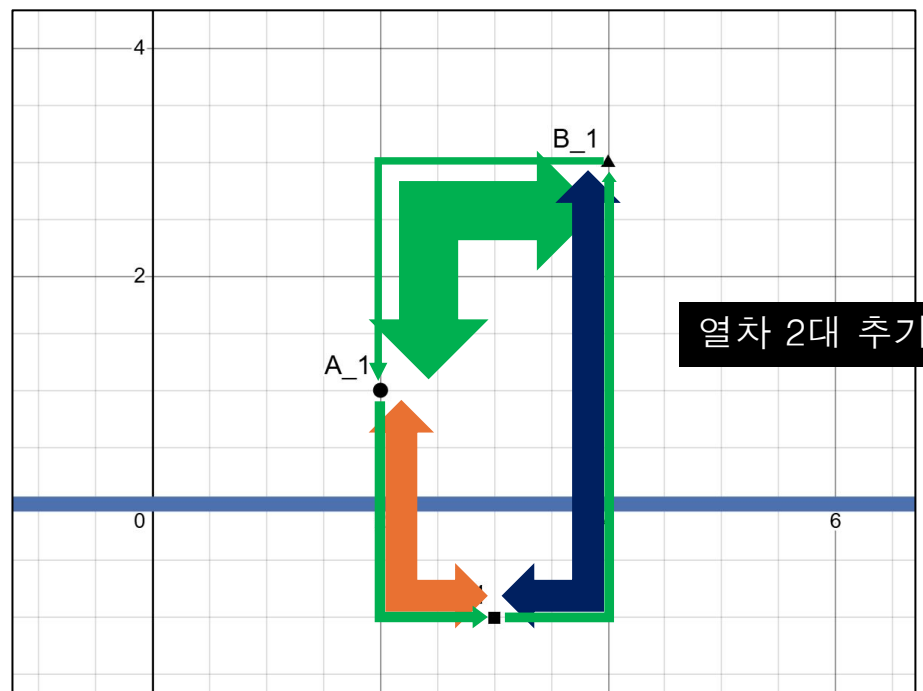
$$\bullet \eta_{model X} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}} \right)$$

$$\bullet \eta_{A_i} = \sum \frac{d \cdot L}{t}$$

$$\bullet \eta_X = \frac{1}{3} \cdot (25 + 34 + 41) = 33.33 \quad \text{Full Mesh Network}$$

$$\bullet \eta_Y = \frac{1}{3} \cdot (96 + 84 + 108) = 96 \quad \text{Ring Network}$$

$$\bullet \eta_{Y'} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{96}{3} + \frac{84}{3} + \frac{108}{3} \right) = 32$$



전략 분석

• 수식 예시

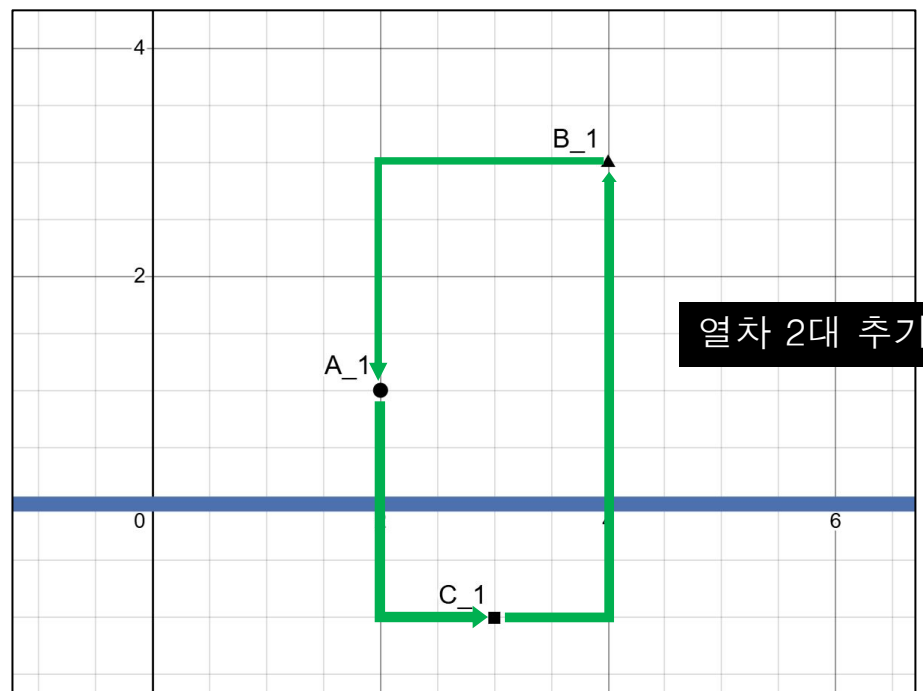
$$\bullet \eta_{model X} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{qrq}} \right)$$

$$\bullet \eta_{A_i} = \sum \frac{d \cdot L}{t}$$

$$\bullet \eta_X = \frac{1}{3} \cdot (25 + 34 + 41) = 33.33 \quad \text{Full Mesh Network}$$

$$\bullet \eta_Y = \frac{1}{3} \cdot (96 + 84 + 108) = 96 \quad \text{Ring Network}$$

$$\bullet \eta_{Y'} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{96}{3} + \frac{84}{3} + \frac{108}{3} \right) = 32$$



전략 분석

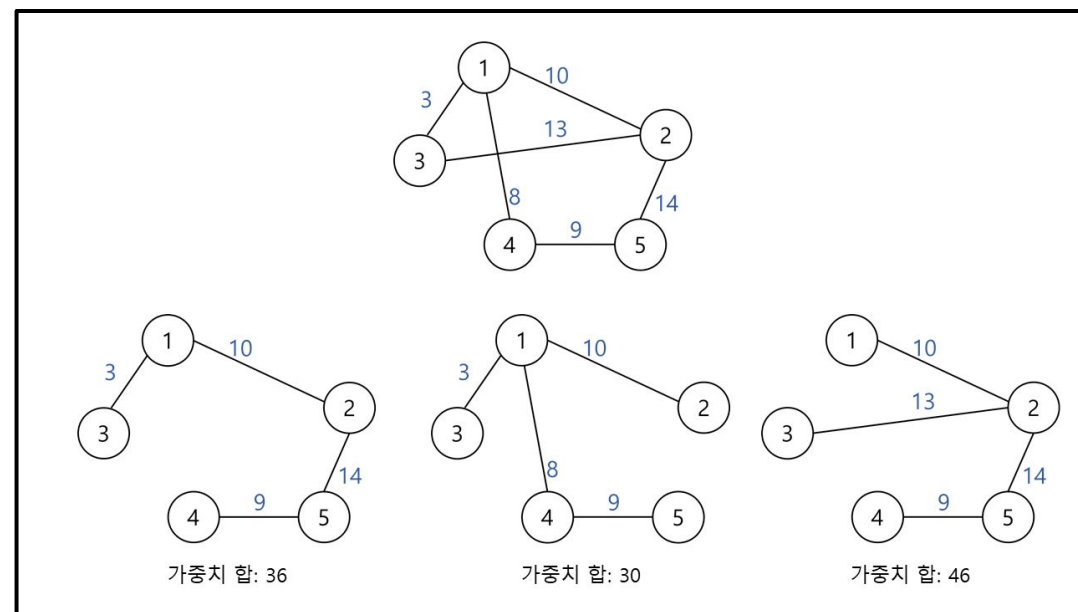
- 본격적인 전략 분석
 - Advanced Prim's Algorithm
 - Developed Ring Algorithm
 - My Algorithm

전략 분석

- 본격적인 전략 분석
 - Advanced Prim's Algorithm
 - Developed Ring Algorithm
 - My Algorithm 👍

수학의 연관성

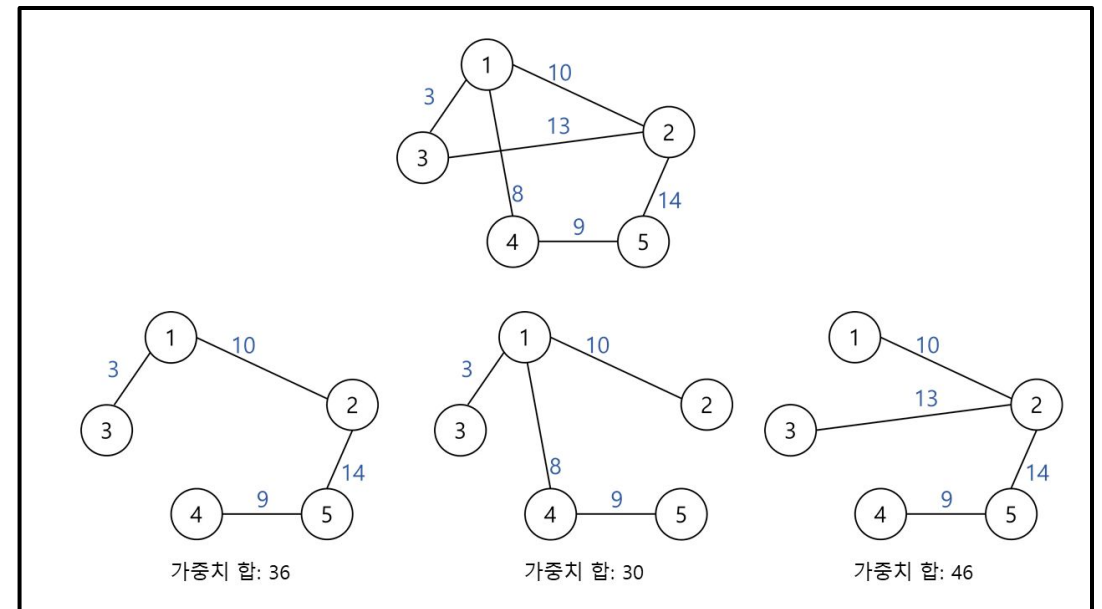
- Graph Theory 그래프 이론
 - Minimum Spanning Tree 최소 신장 트리
 - Kruskal's Algorithm & Prim's Algorithm



수학의 연관성

- Graph Theory 그래프 이론
 - Kruskal's Algorithm – 정렬한 Edge를 Cycle 없도록 선택

Edge	Weight	Add
1-3	3	O
1-4	8	O
4-5	9	O
1-2	10	O
2-3	13	X
2-5	14	X

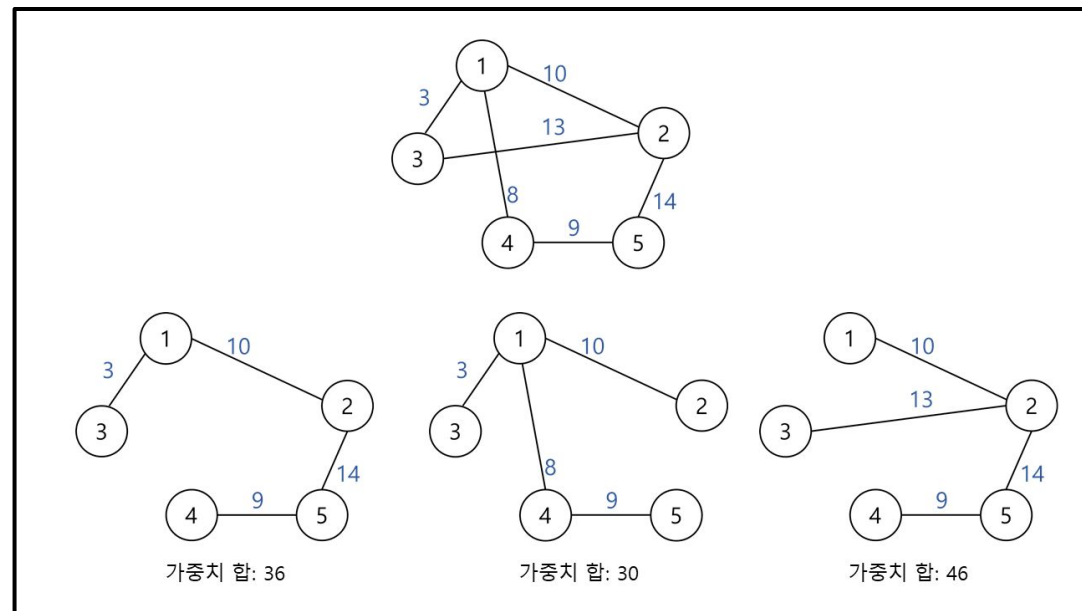


수학의 연관성

- Graph Theory 그래프 이론

- Prim's Algorithm – 최소 가중치 Edge 선택

- $V_1 \rightarrow V_3, E_{13} \rightarrow V_4, E_{14} \rightarrow V_5, E_{45} \rightarrow V_2, E_{12}$
 - $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$



알고리즘 비교 (1)

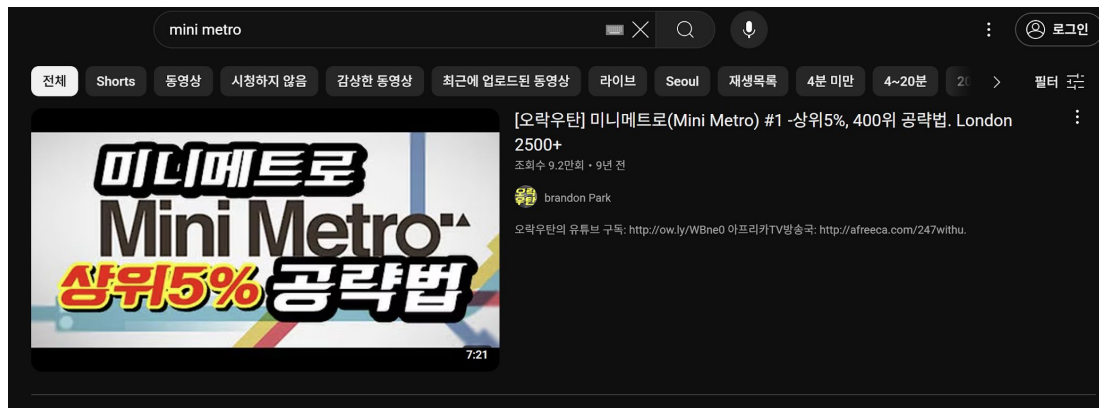
- Advanced Prim's Algorithm
 - 새로운 정차역이 생겼을 경우, 가중치가 가장 작아지도록 노선 확장.
 - 순환선 생기지 않도록.
 - 같은 종류의 정차역을 연달아 지나는 것은 신경쓰지 않음.

알고리즘 비교 (2)

- Developed Ring Algorithm

(https://youtu.be/gvj1dEppZfA?si=kJ7cSCzZ_Ly91wDc)

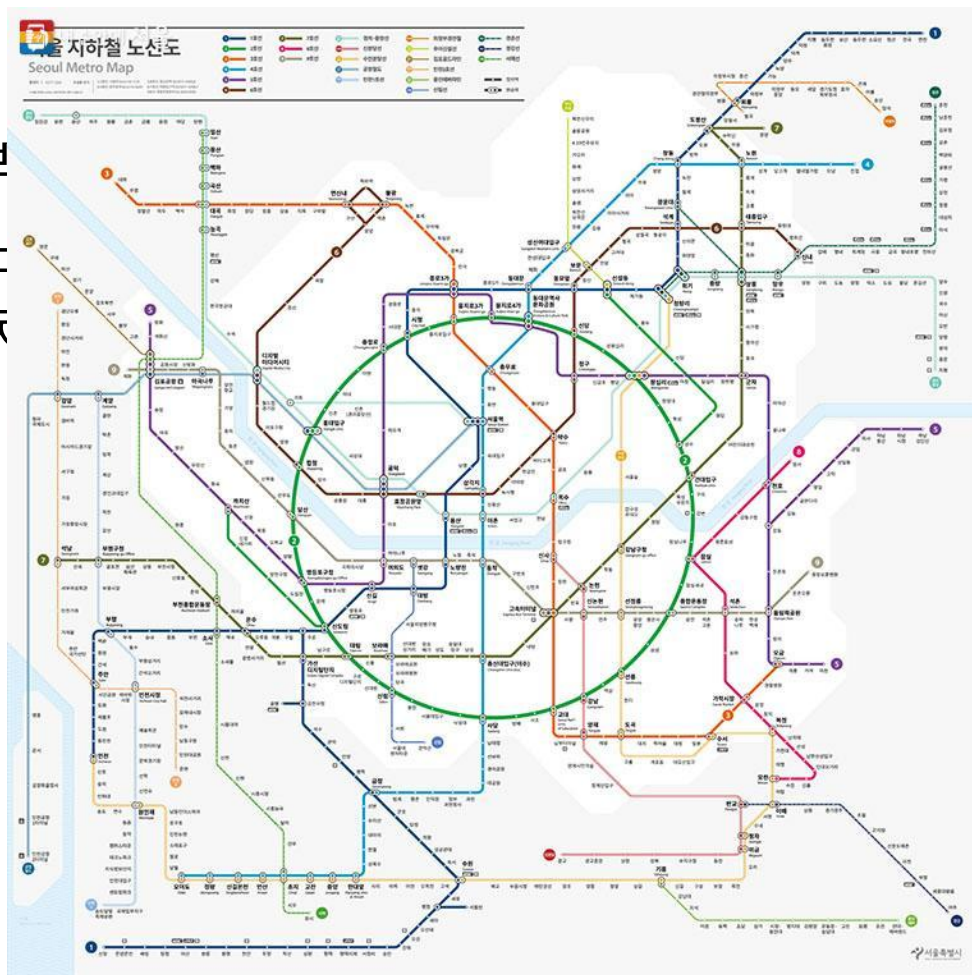
- 모든 노선을 순환선으로.
- 각 노선의 길이를 최대한 비슷하게.
- 같은 종류의 정차역을 3개 이상 연달아 지나지 않게.



알고리즘 비교 (3)

- My Algorithm

- 순환선은 중심부
- 순환선이 아닌 노
- 같은 종류의 정차



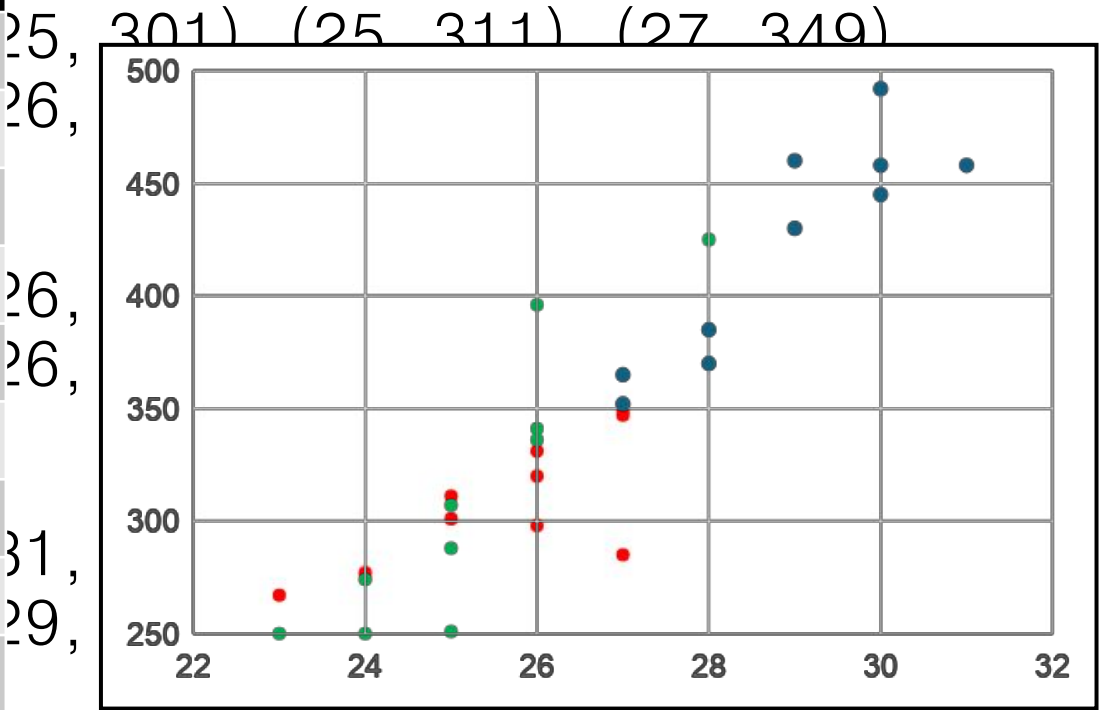
방향으로.
네.

알고리즘 비교

- 각 알고리즘 별로 직접 10판씩 진행

알고리즘 비교

(1) APA		(2) DRA		(3) MA	
Day	Score	Day	Score	Day	Score
24	277	23	232	30	458
26	331	28	425	27	352
26	298	24	221	27	365
25	301	26	336	31	458
25	311	25	288	30	445
27	349	25	307	28	370
23	267	25	251	28	385
27	285	26	396	30	492
27	347	24	274	29	460
26	320	26	341	29	430
25.6	308.6	25.2	307.1	28.9	421.5



알고리즘 비교

- AI에게 11슬라이드의 효율도 공식을 학습시킨 후, 공식 일반화

전략 분석

- 최종 수식

$$\eta_{\text{model } X} = \frac{n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + n_b \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + n_c \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}}}{n_a + n_b + n_c}$$
$$\approx \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q \eta_{B_i}^2}{q}} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \eta_{C_i}^2}{r}} \right) \quad \text{값이 작을수록 높은 효율!}$$

11

✓ 일반화된 공식

각 정차역 효율도:

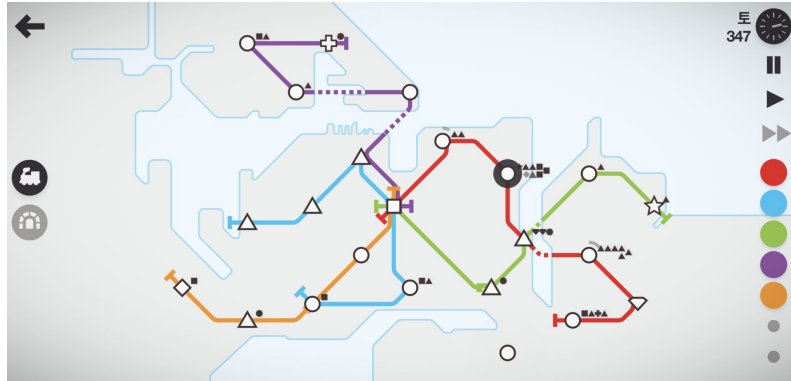
$$\eta_{A_i} = \sum_{j=1}^m \frac{d_{ij} \cdot L_j}{t_j} \quad \text{with} \quad d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

- d_{ij} : 정차역 A_i 와 최근 노선 j 위 정거장 P_j 간의 거리
- L_j : 노선 j 의 총 길이
- t_j : 노선 j 위 열차 수
- m : 고려하는 노선의 수 (또는 노드)

이걸 전체 모델 효율도 식에 그대로 넣으면:

$$\eta_{\text{model } X} = \frac{1}{n_a + n_b + n_c} \left(n_a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \eta_{A_i}^2}{p}} + \dots \right)$$

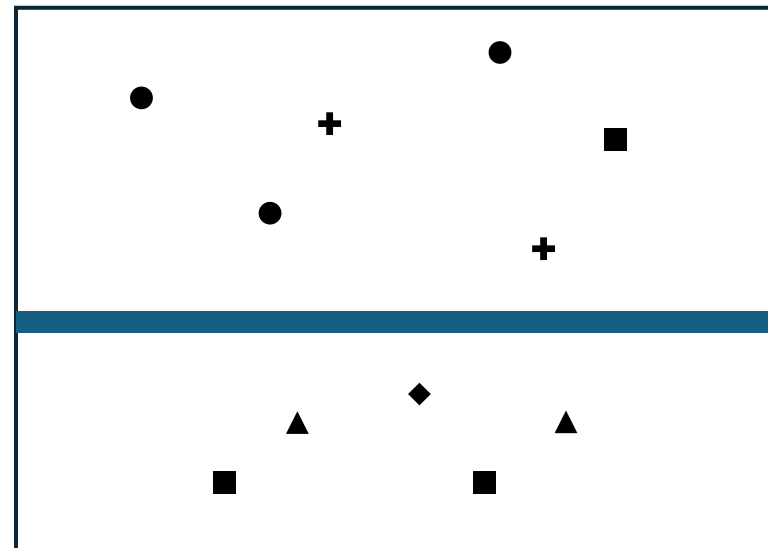
알고리즘 비교



모델	정차역 수	평균 거리 d	평균 L	η_{model}
(1) APA	22	2.6	21	$\sqrt{(\text{평균 제공합})} \approx 54.6$
(2) DRA	21	3.2	22	$\sqrt{(\dots)} \approx 70.4$
(3) MA	21	1.9	20	$\sqrt{(\dots)} \approx 38.0$

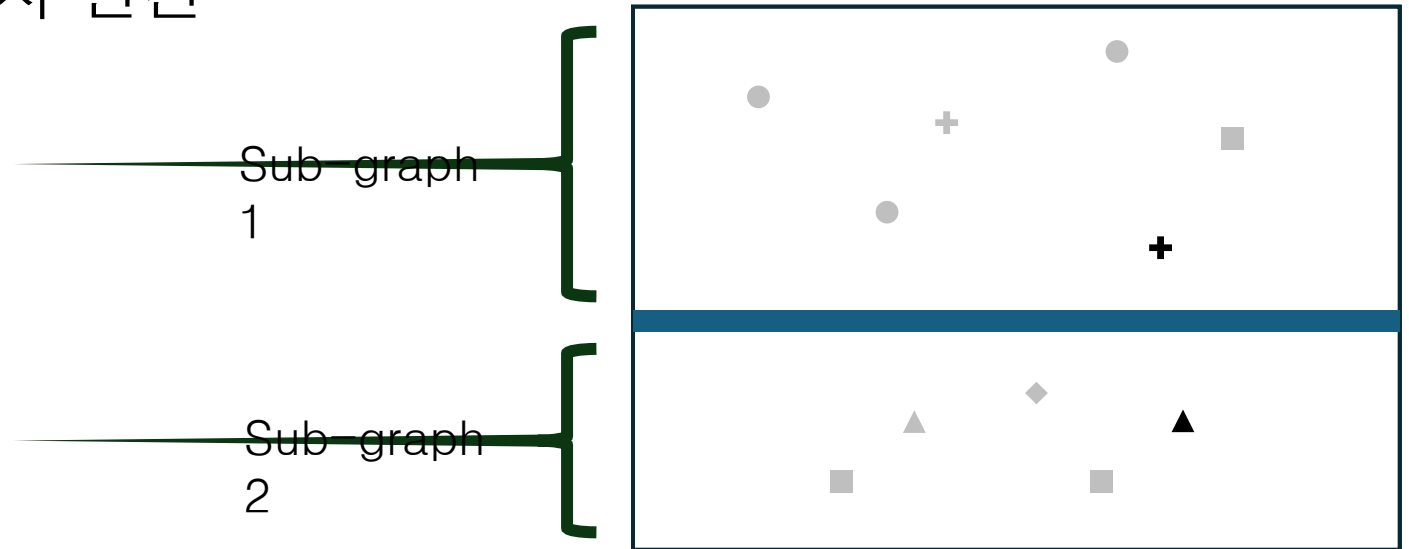
특이 조건

- 다리 1개 이하
 - 잠시 역 종류를 늘려서...
 - 위쪽과 아래쪽을 연결할 수밖에 없는 상황



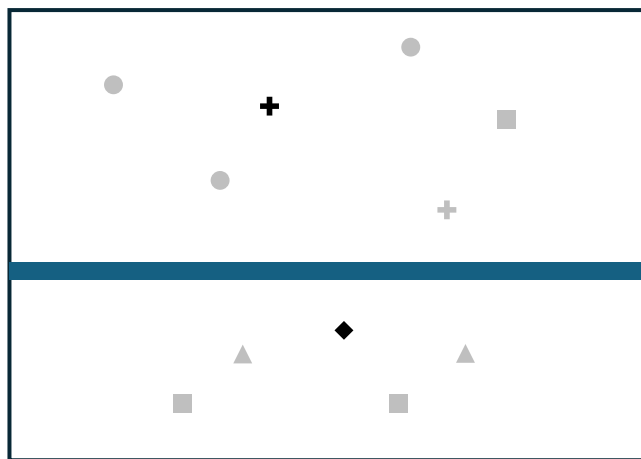
특이 조건

- 다리 1개 이하
 - 두 구역을 별도의 부분그래프로 연결 (MA)
 - 각 구역의 허브끼리 연결
 - 허브를 어디에 놓을지 관건

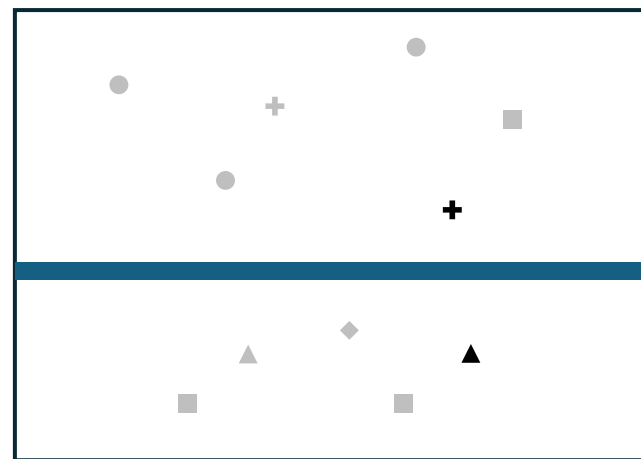


특이 조건

- 1. 각 Sub-graph의 중심에서 가장 가까운 허브
- 2. 최단거리로 연결할 수 있도록 강에서 가까운 허브



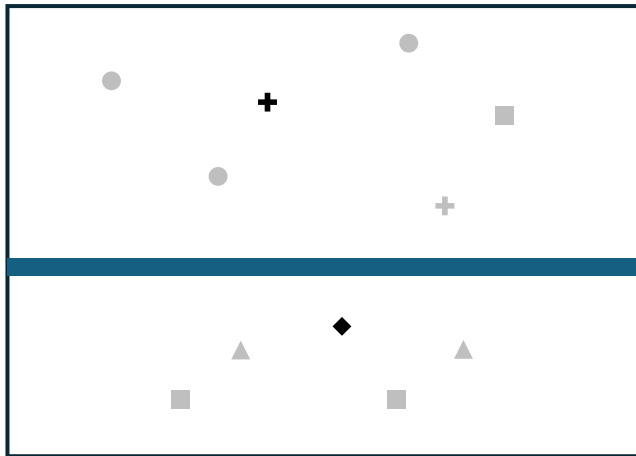
효율도 :
86.88



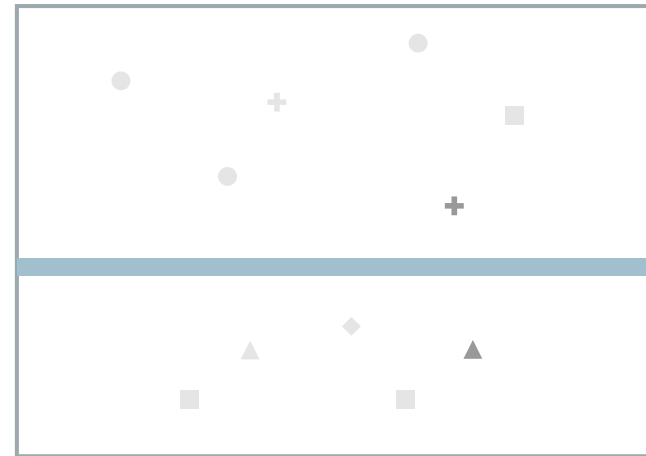
효율도 :
163.75

특이 조건

- 1. 각 Sub-graph의 중심에서 가장 가까운 허브
- 2. 최단거리로 연결할 수 있도록 강에서 가까운 허브



효율도 :
86.88



효율도 :
163.75

결론

- 게임은 수학이다 (어쩌면 2탄...?)

- 단순 지혜
실생활 상

- L Hub

등 여러

게임은 수학이다

Mini Metro 게임의 수학적 전략과 알고리즘

2024310862 이재웅