

유클리드 제 5공리와 비유클리드 기하학

부제 : 삼각형의 내각의 합이 180도가 아닐 수도 있다??

MIMIC
김민국

명제

논리학적으로 뜻이 분명한 문장

참 또는 거짓으로 분별되어야 함.

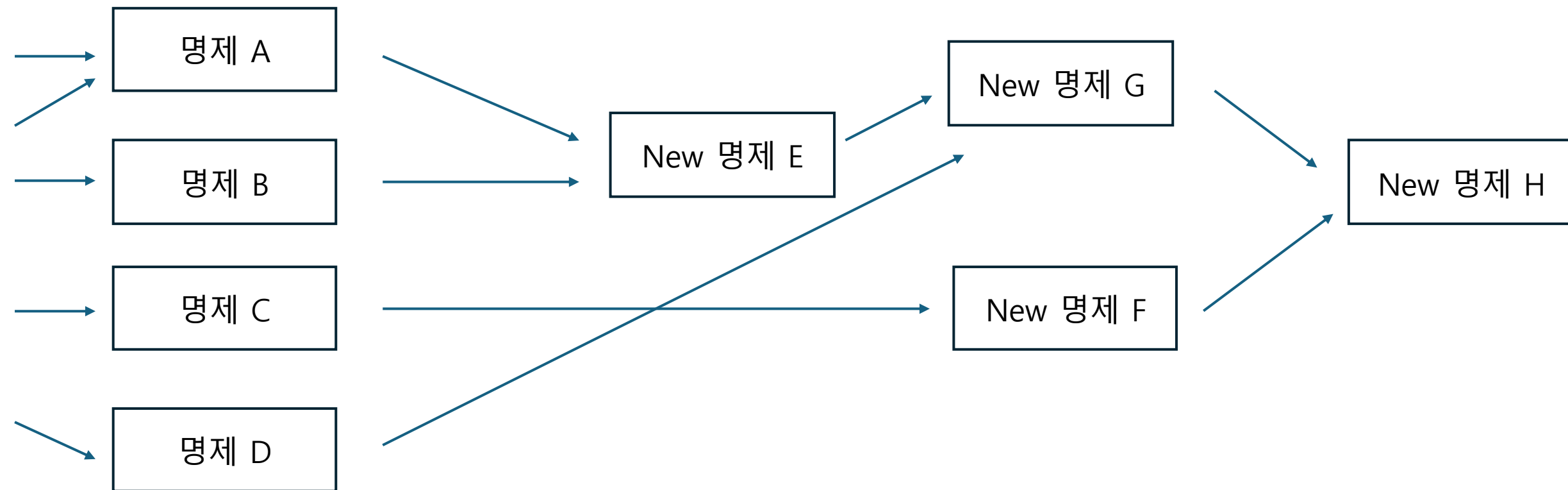
ex) 7은 소수이다.

ex) π 는 유리수이다.

ex) 미믹은 최고의 동아리다~

수학

참인 명제들을 통하여 새로운 참인 명제들을 찾아내고,
이를 확장시키는 학문



예시

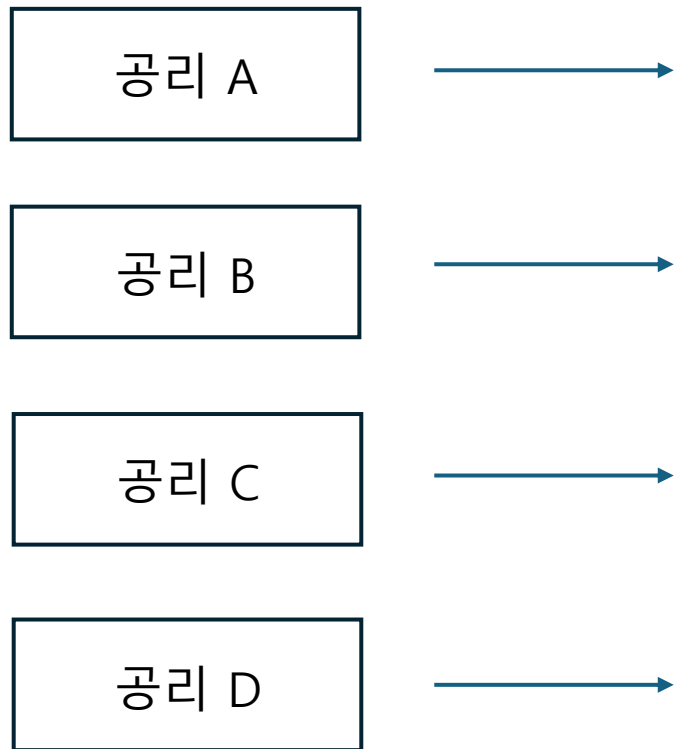
명제 1 – 원에 있는 부채꼴의 원주각의 크기는 중심각의 크기의 절반이다.

명제 2 – 반원의 중심각은 180° 이다.

명제 1 + 명제 2 -> 직각삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원을 그리면, 빗변은 원의 지름이다.

공리

가장 기초적인 근거가 되는 명제(참임을 믿고 가는 명제)



수 체계와 공집합

1. 두 집합의 원소가 모두 똑같다면, 두 집합은 같다.
2. 공집합은 존재한다.
3. 멍집합은 존재한다.

등등...

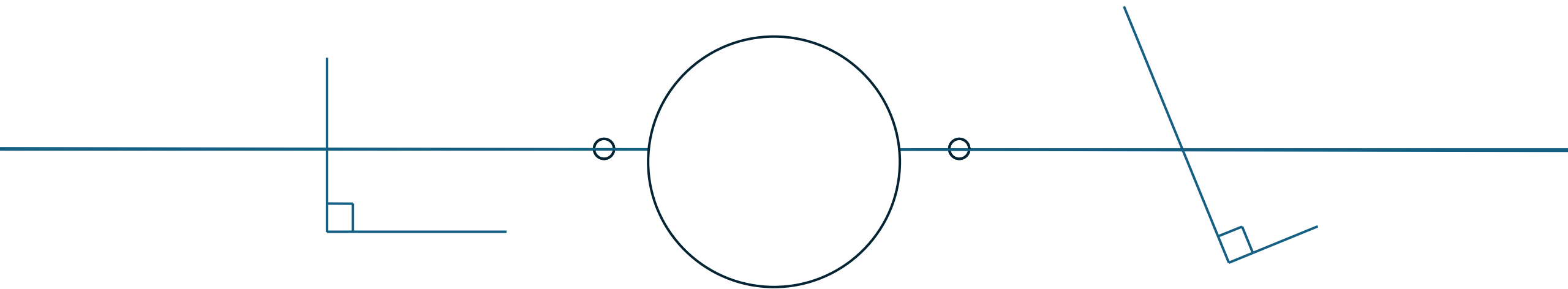
1. 서로 다른 두 점이 주어졌을 때, 그 두 점을 잇는 직선을 그을 수 있다.
2. 임의의 선분은 더 연장할 수 있다.
3. 서로 다른 두 점 A, B 에 대해, 점 A 를 중심으로 하고 선분 AB 가 반지름인 원을 그릴 수 있다. 중반
4. 모든 직각은 서로 합동이다.



유클리드

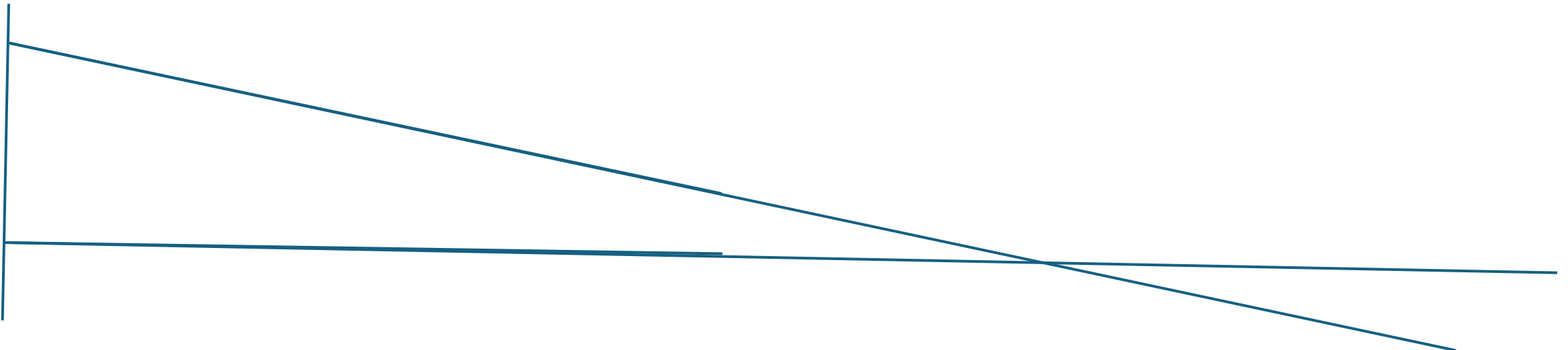
기원전 4세기 중반 ~ 기원전 3세기 중반

2. 원의 외접원을 점 A, B에 접선, 점 A를 중점을 뒀한 직선을 그을
 선분 AB가 반지름인 원을 그릴 수 있다.



유클리드 제 5공리

5. 임의의 직선이 두 직선과 만날 때, 그때 생기는 내각의 합이 180° 보다 작은 방향으로 직선을 연장하면 한 점에서 만난다.
(평행선의 공리, 제5공준)



1. 주어진 직선 밖 한 점을 지나는, 그 직선의 평행선은 많아야 하나 존재한다.
2. 모든 삼각형의 내각합은 180° 이다.
3. 직사각형이 존재한다.
4. 평행한 두 직선의 거리는 어디에서나 일정하다.
5. 합동이 아닌 닮음삼각형이 존재한다.

등등..

동치 증명

임의의 직선이 두 직선과 만날 때, 그때 생기는 내각의 합이 180° 보다 작은 방향으로 직선을 연장하면 한 점에서 만난다.



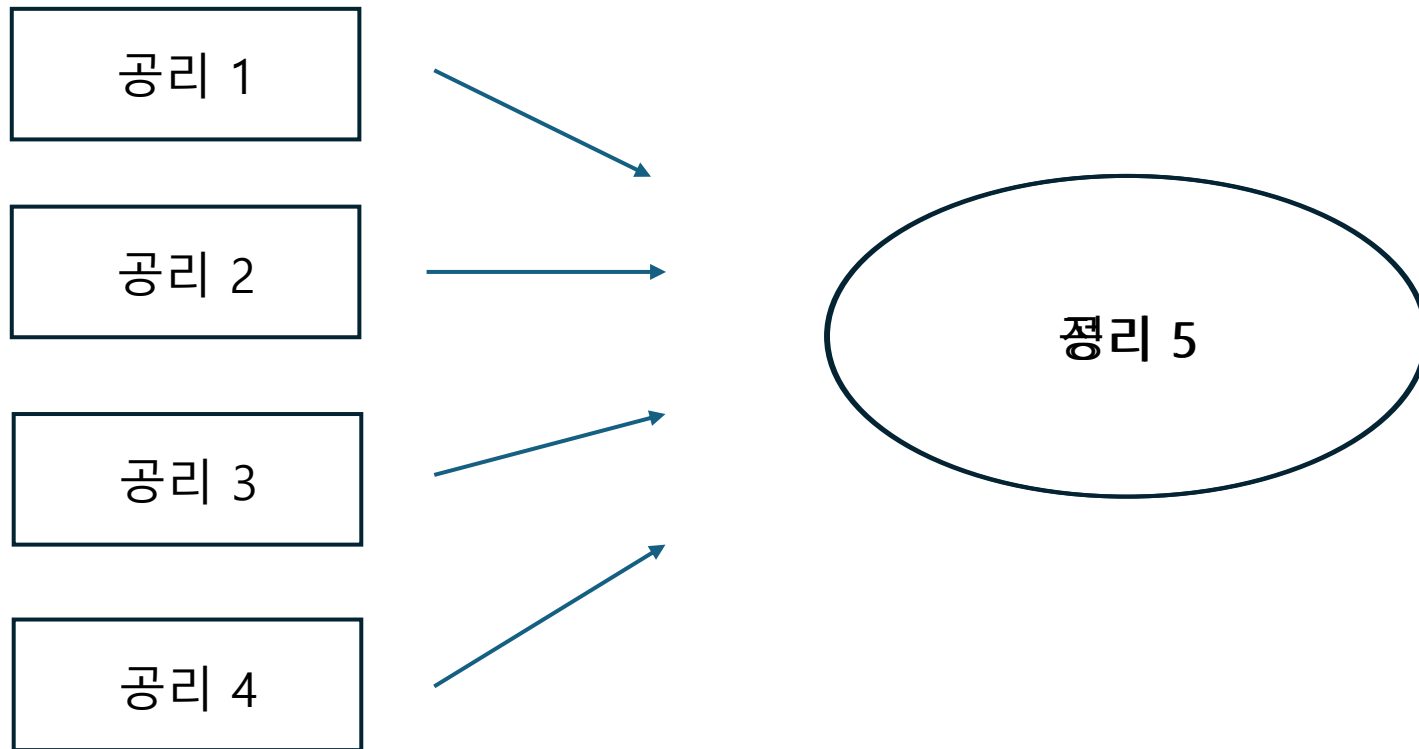
주어진 직선 밖 한 점을 지나는, 그 직선의 평행선은 많아야 하나 존재한다.



삼각형의 내각의 합은 180° 이다.

의문점

- 사실은 공리1-4로 참임을 증명할 수 있는 명제라면 공리가 아니지 않을까?

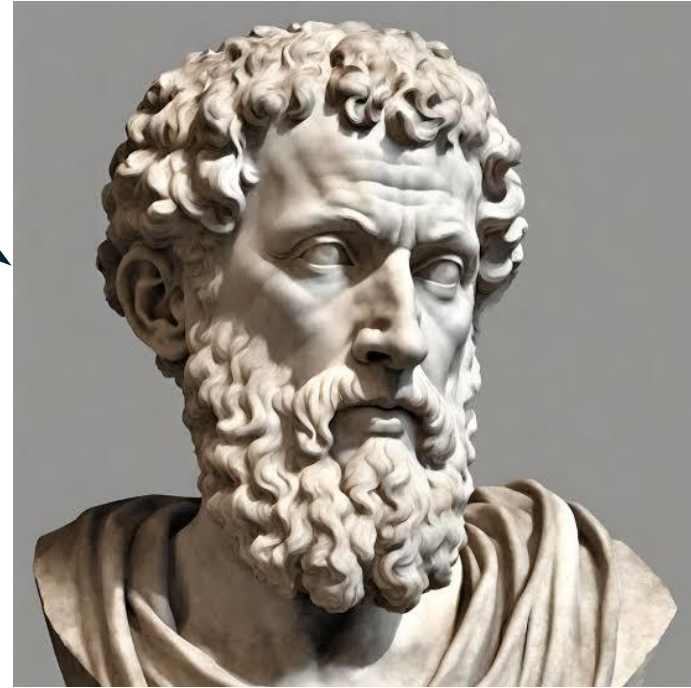




Ptolemy
100 – 160

이거 공리
아닌거
증명했음!
(사실 아님)

이것은
공리가 아님.
왜냐하면
정리이기
때문이다...
(이것도 아님)



Proclus
412 - 485



Bolyai Jánosról
1802 - 1860

"You must not attempt this
approach to parallels.

I know this way to the very end.

I have traversed this bottomless
night, which extinguished all light
and joy in my life.

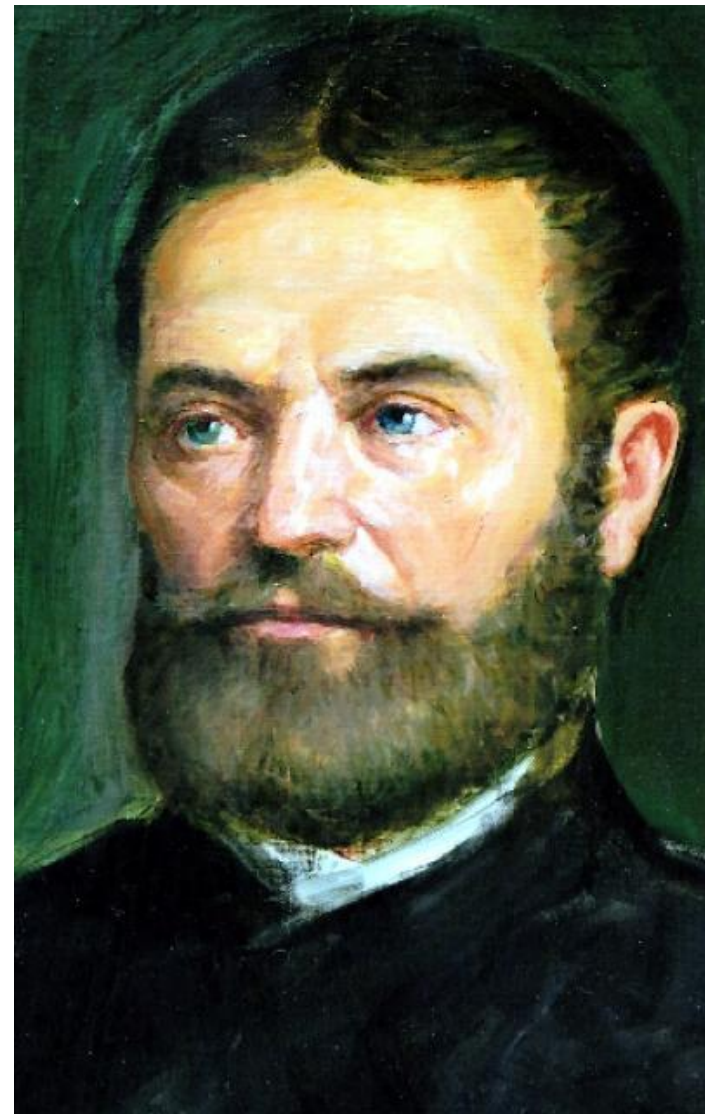
I entreat you, leave the science
of parallels alone...

Learn from my example."

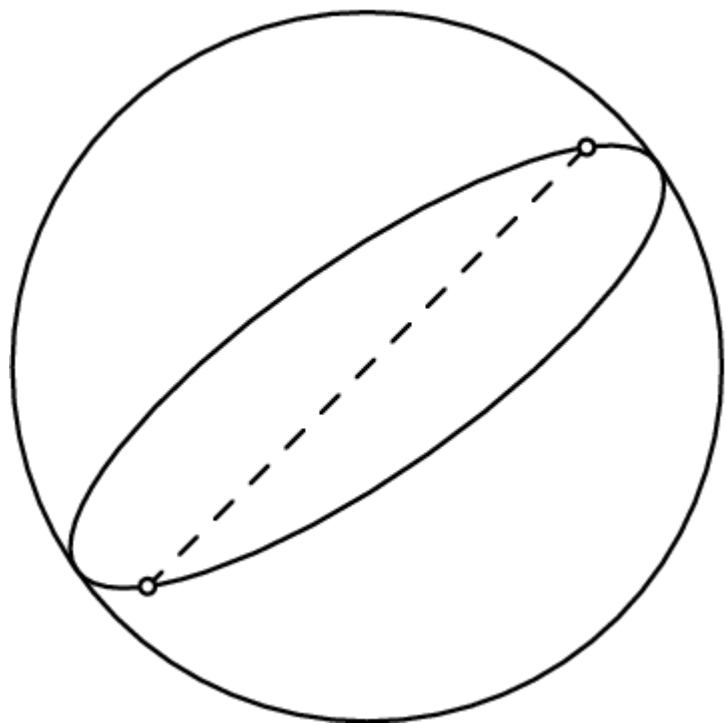
- Father

I have discovered such wonderful things that I was amazed...out of nothing I have created a strange new universe.

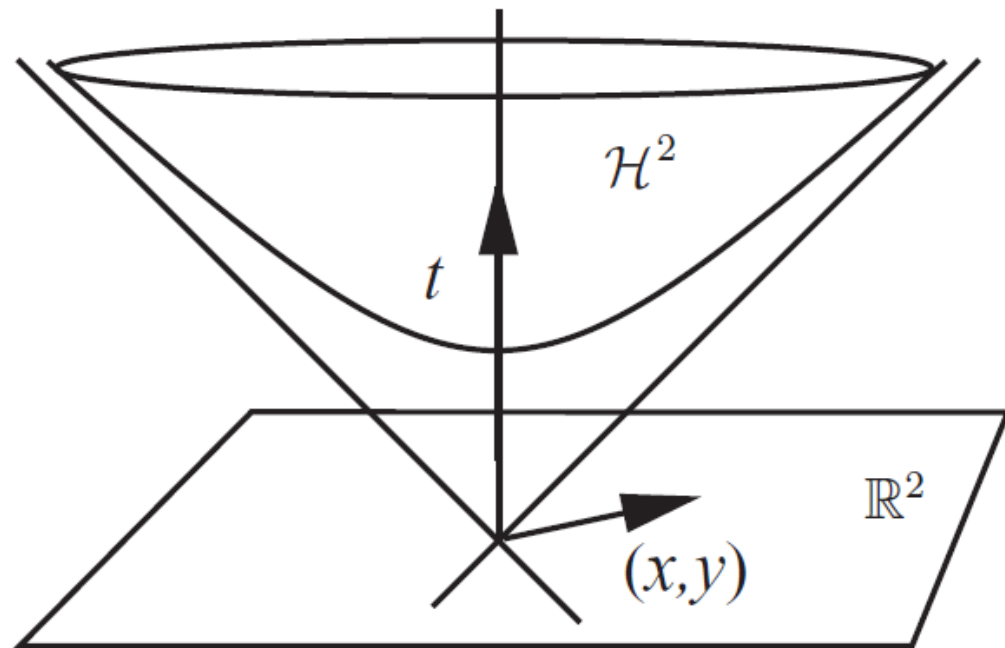
- Bolyai Jánosról



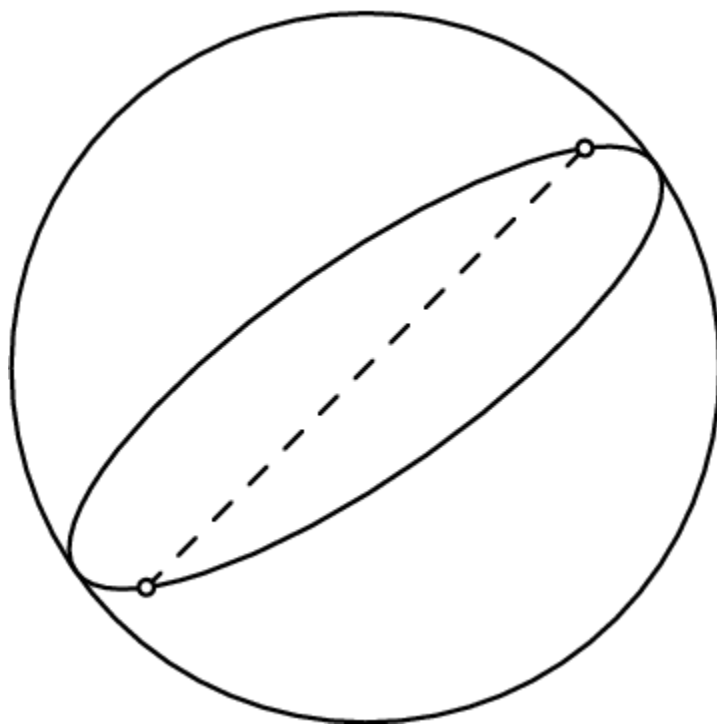
Bolyai Jánosról
1802 - 1860



Spherical space



Hyperbolic space

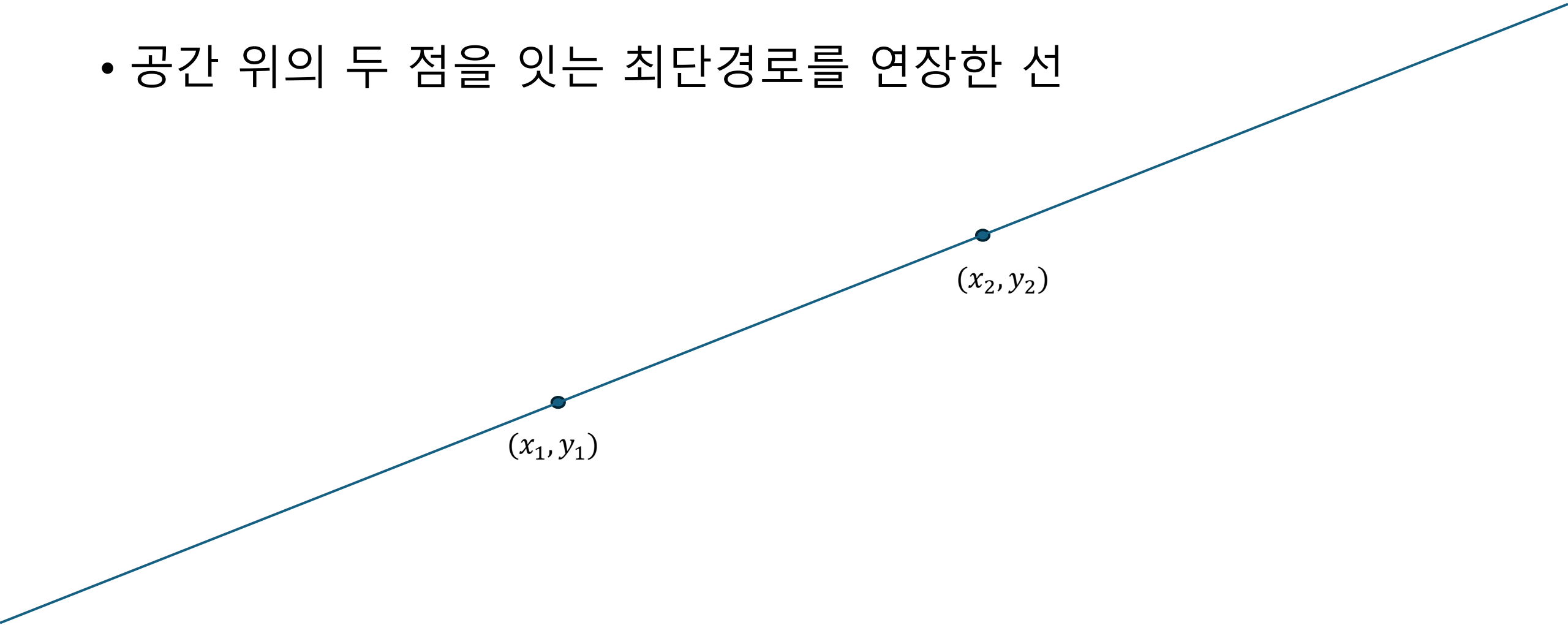


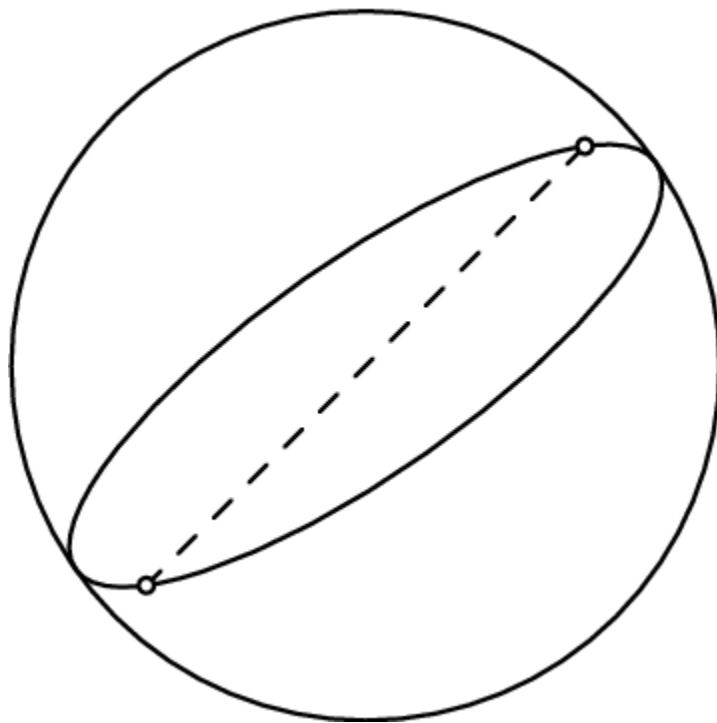
Spherical space

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

직선의 정의?

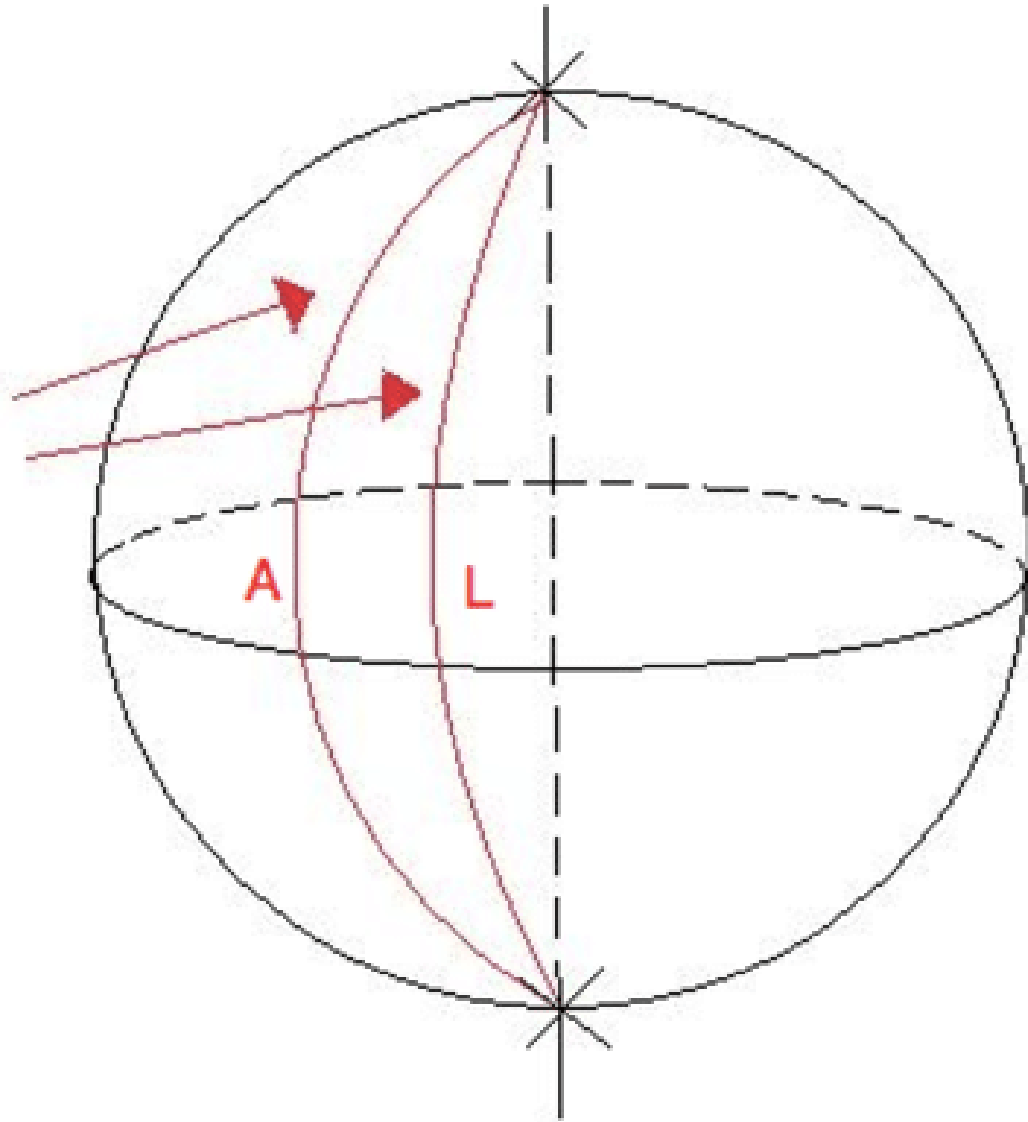
- 공간 위의 두 점을 잇는 최단경로를 연장한 선





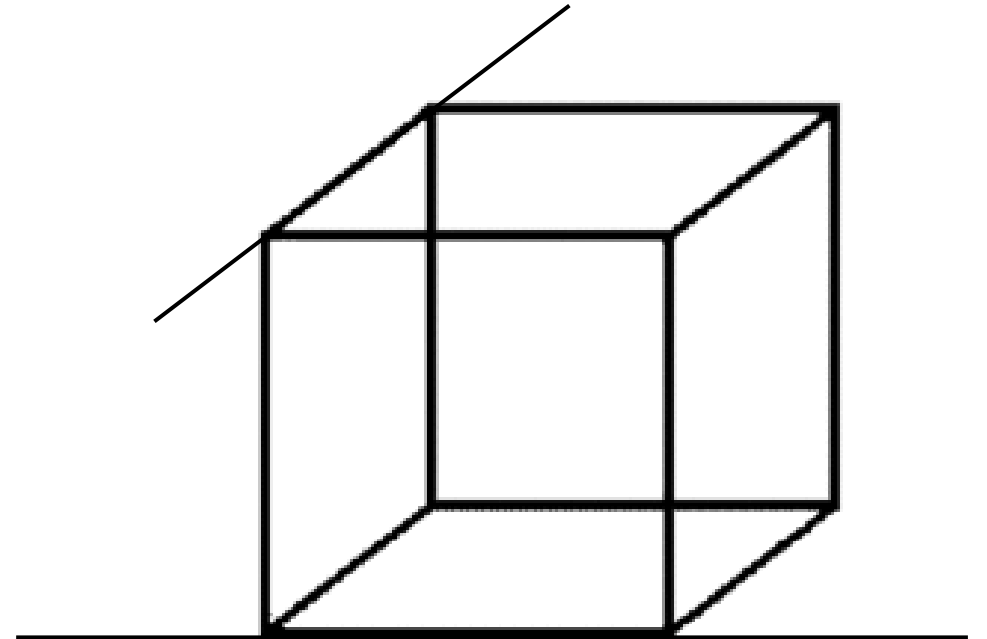
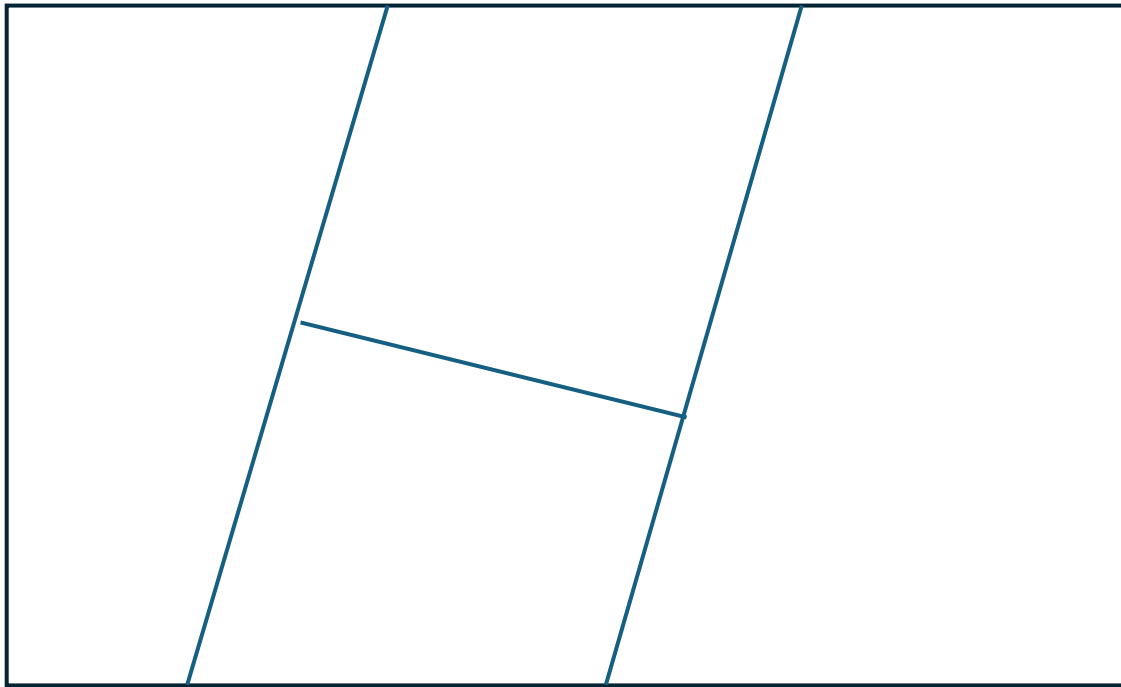
구 표면 위를 경로로 하는 두 점을 잇는 최단경로는 대원

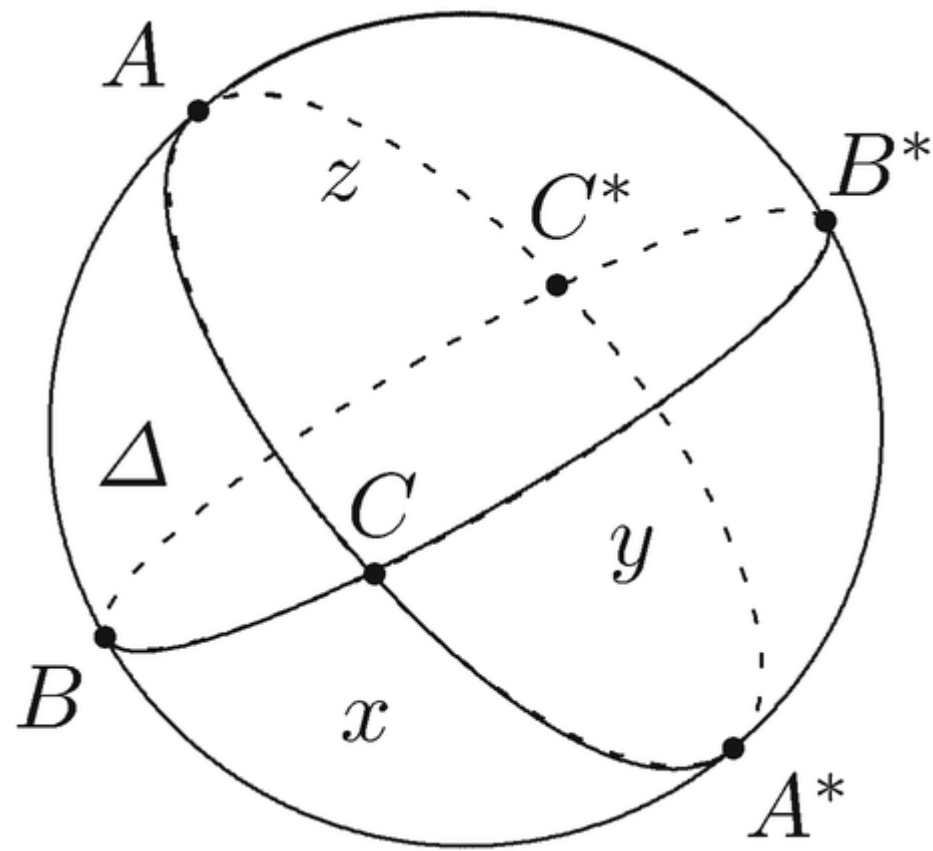
두 선이 만나면, 그 사이 끼인각은 평면들의 끼인각으로 정의



평행선의 정의?

- 곡면(평면)에서 서로 만나지 않음.
- 두 직선과 수직으로 만나는 다른 직선이 존재함.



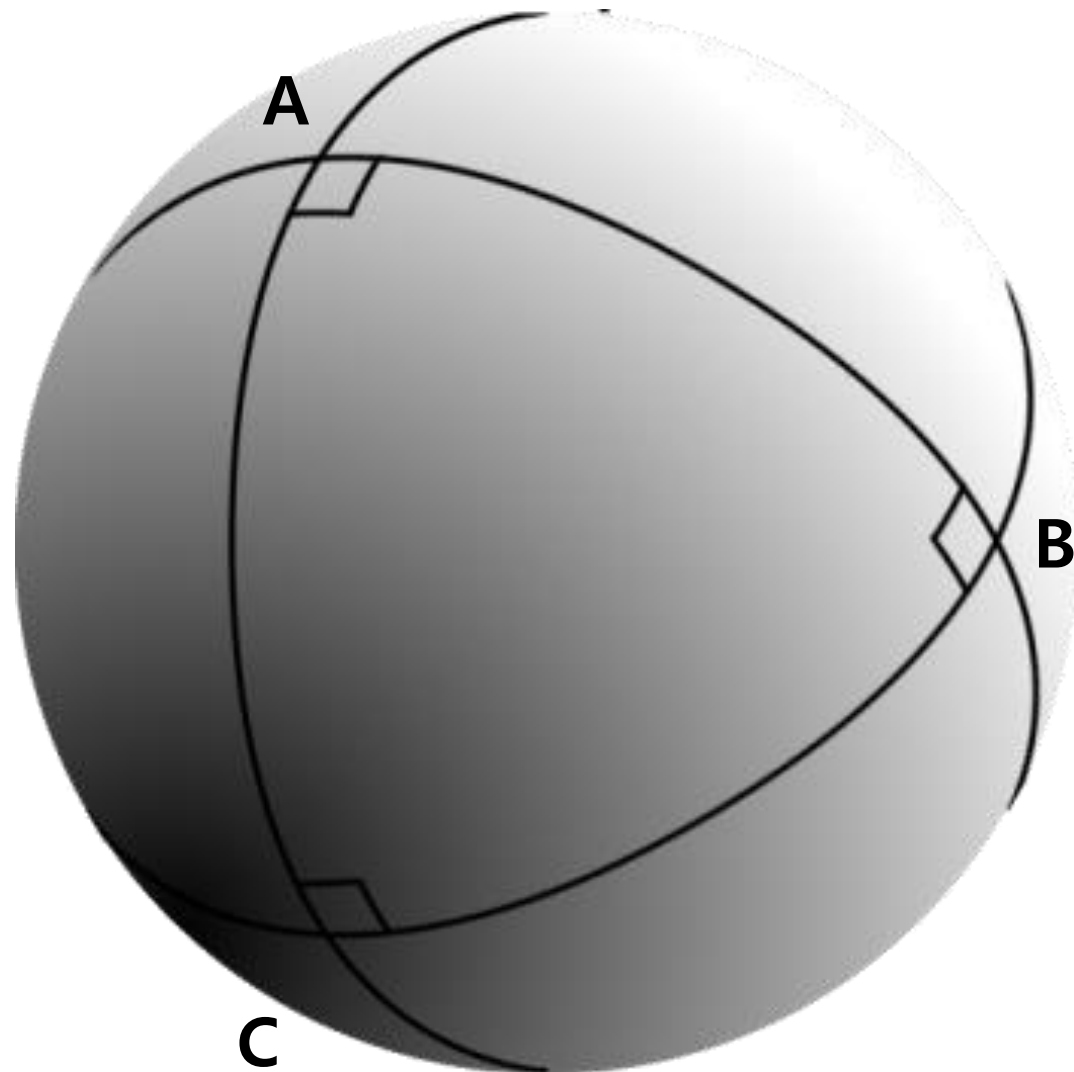


유클리드 제 5공리 X

(직선 밖의 한 점을 지나는 평행선은 존재하지 않는다)

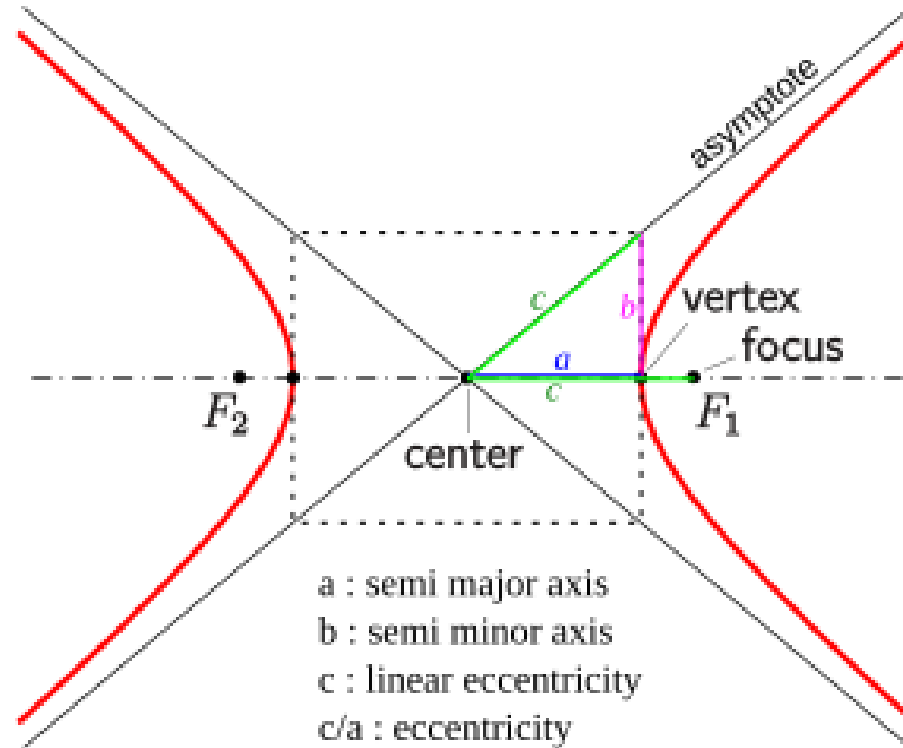
1. 주어진 직선 밖 한 점을 지나는, 그 직선의 평행선은 많아야 하나 존재한다.
2. 모든 삼각형의 내각합은 180° 이다.
3. 직사각형이 존재한다.
4. 평행한 두 직선의 거리는 어디에서나 일정하다.
5. 합동이 아닌 닮음삼각형이 존재한다.

등등..



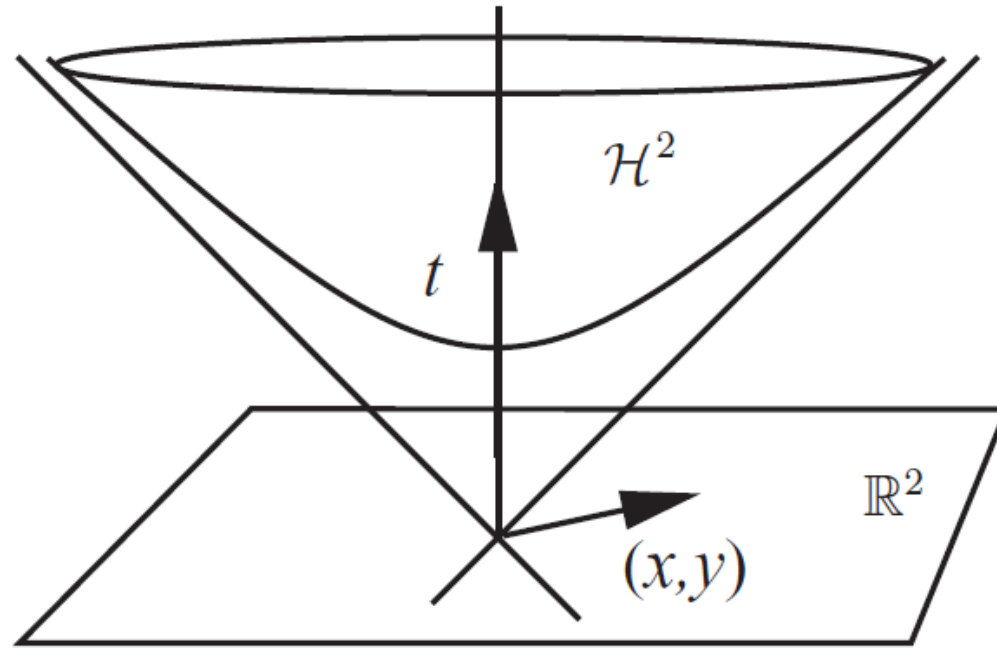
$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \text{area } \triangle ABC$$

쌍곡선(Hyperbola)



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

점근선 $y = \pm x$

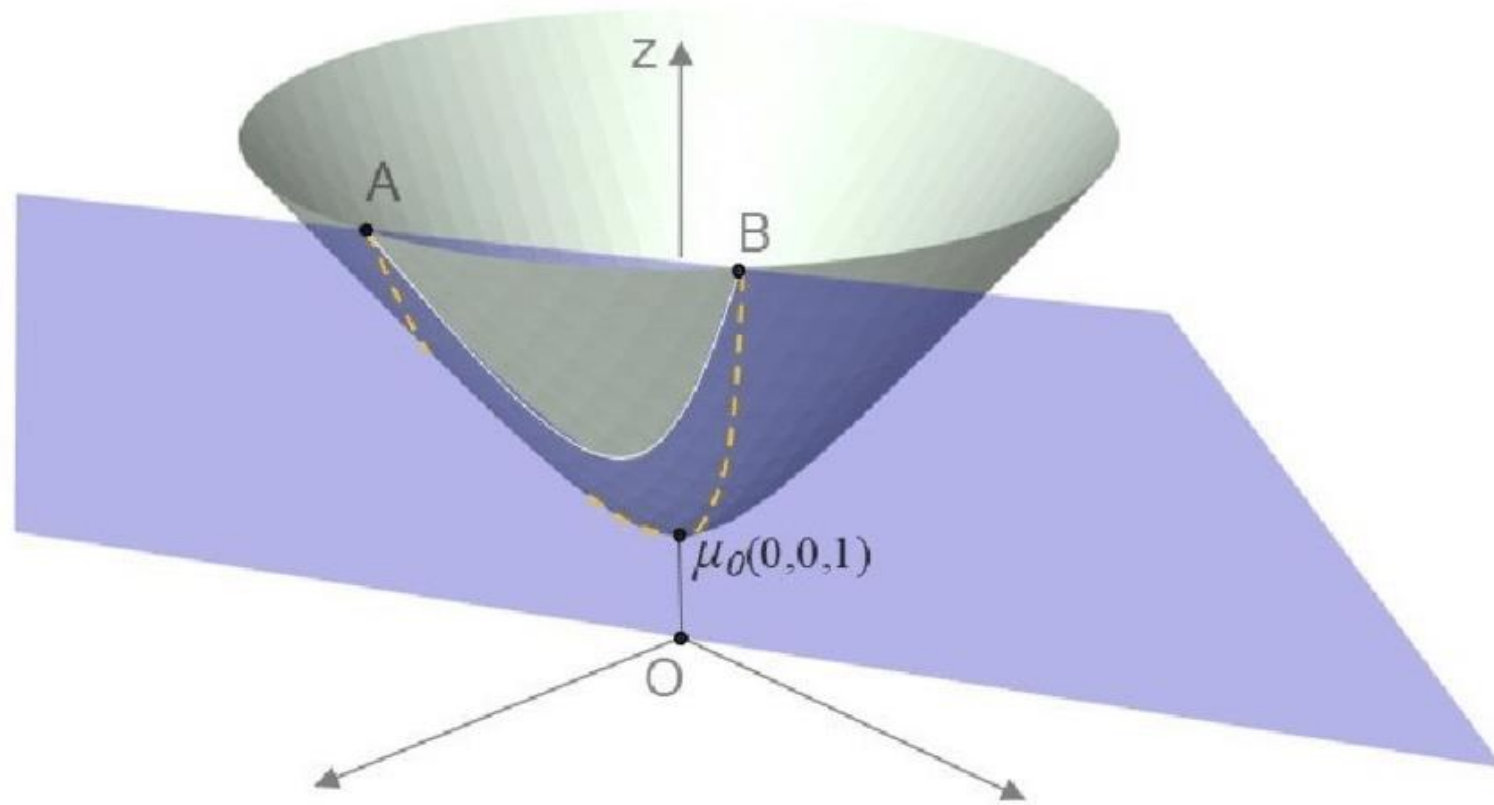


Hyperbolic space

$$\mathcal{H}^2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -t^2 + x^2 + y^2 = -1, t > 0\}$$

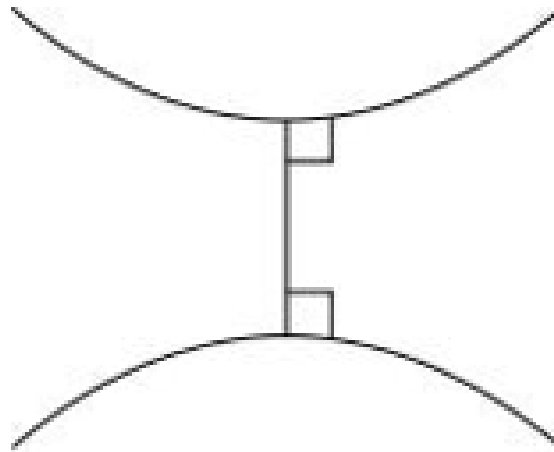
Hyperbolic에서의 직선

원점을 지나는 평면과 $\mathcal{H}^2$ 의 교선(쌍곡선)

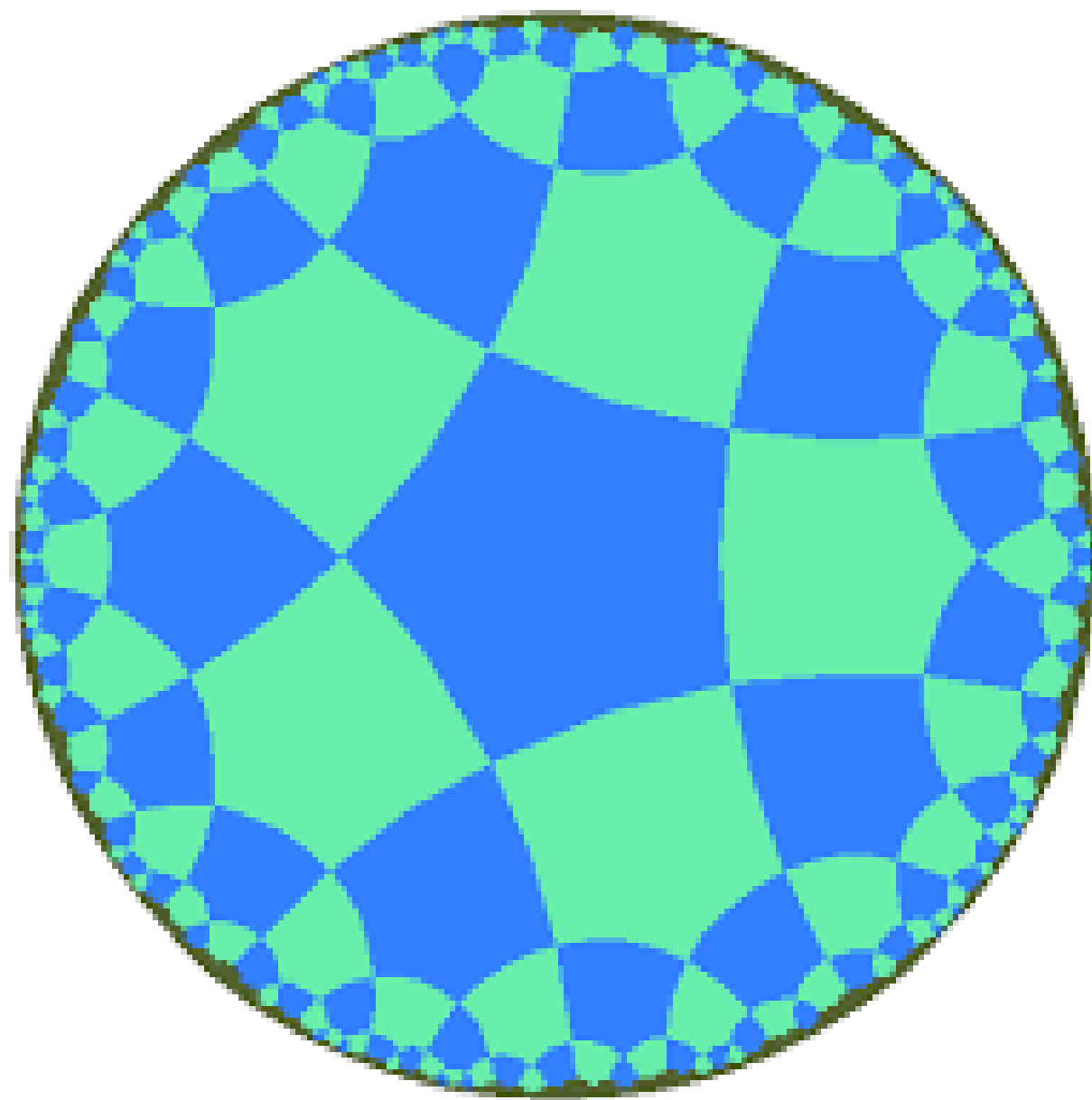


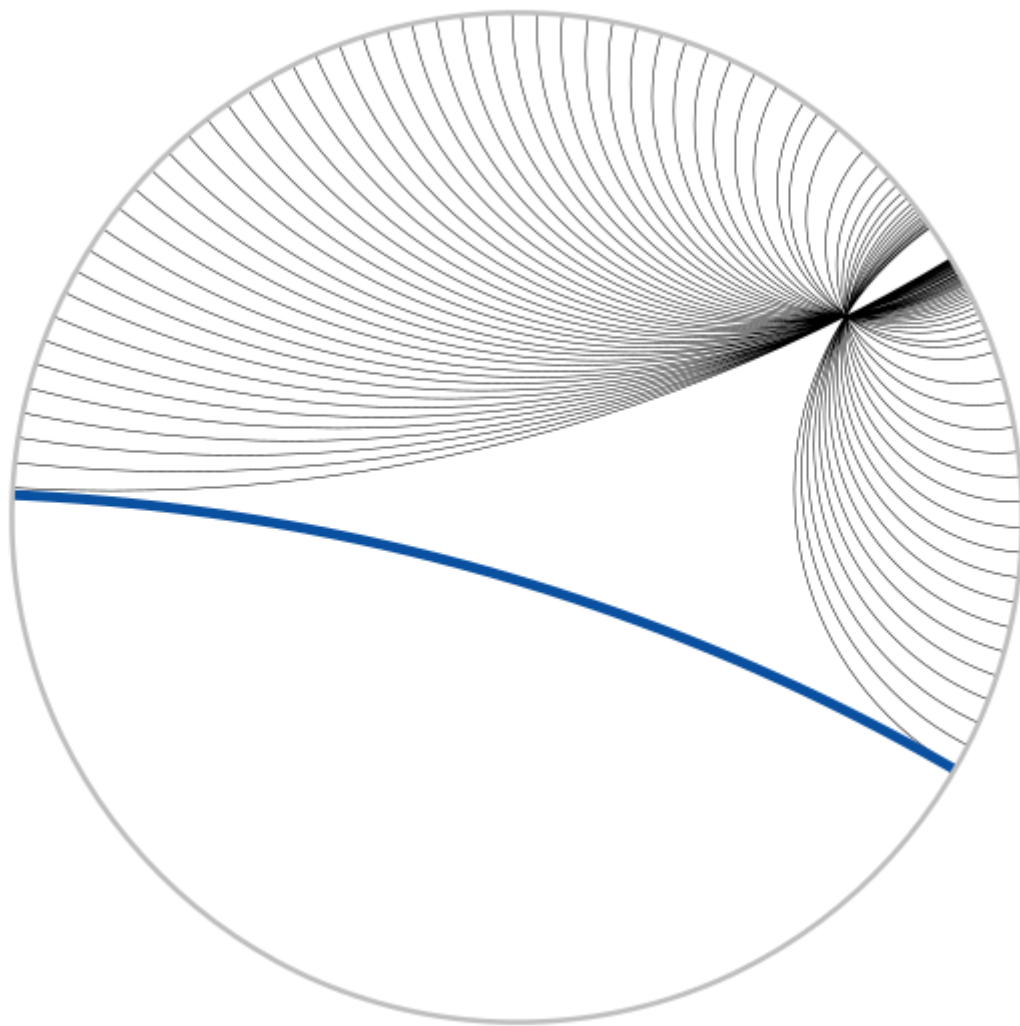
Hyperbolic에서의 평행선

- 곡면(평면)에서 서로 만나지 않음.
- 두 직선과 수직으로 만나는 다른 직선이 존재함.

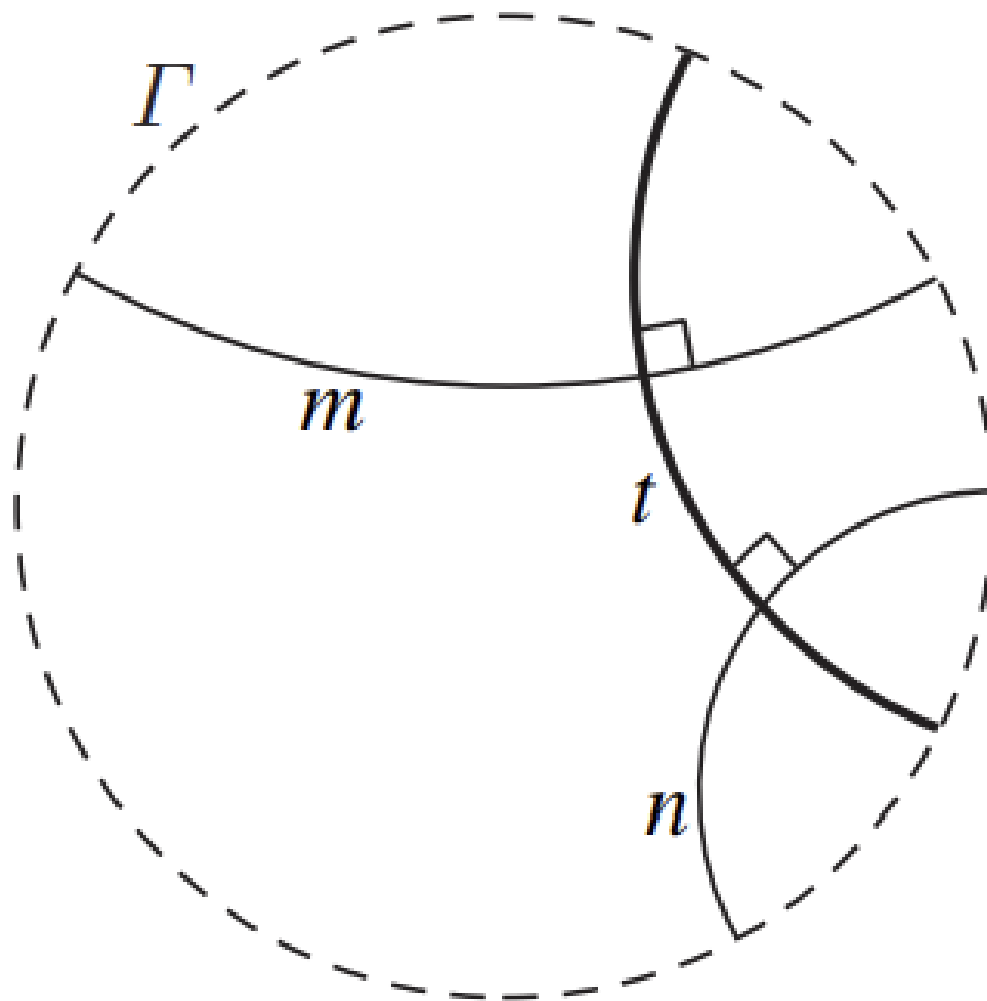


Hyperbolic



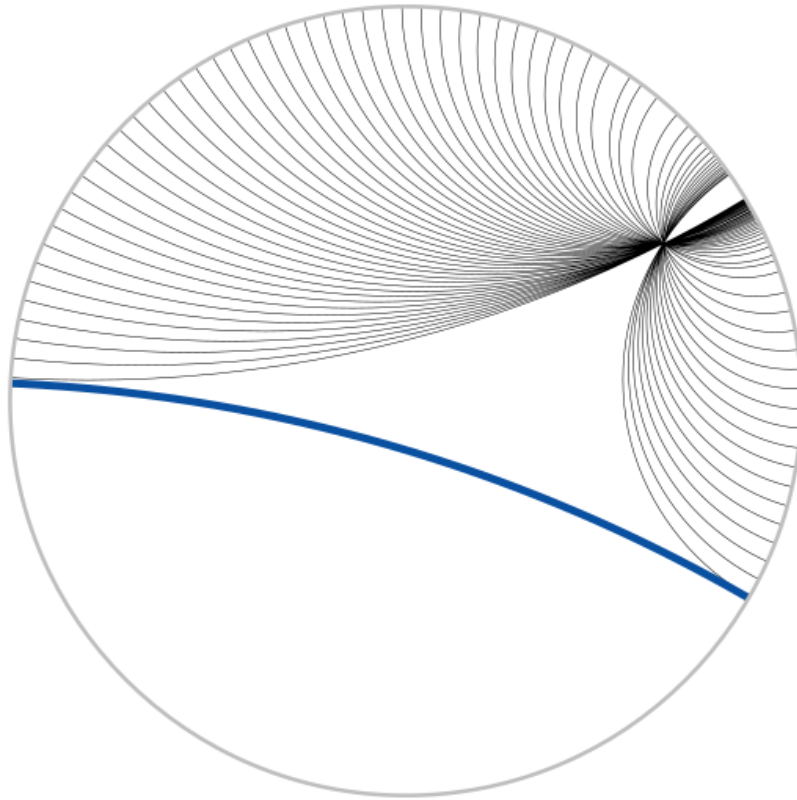


Poincare disk

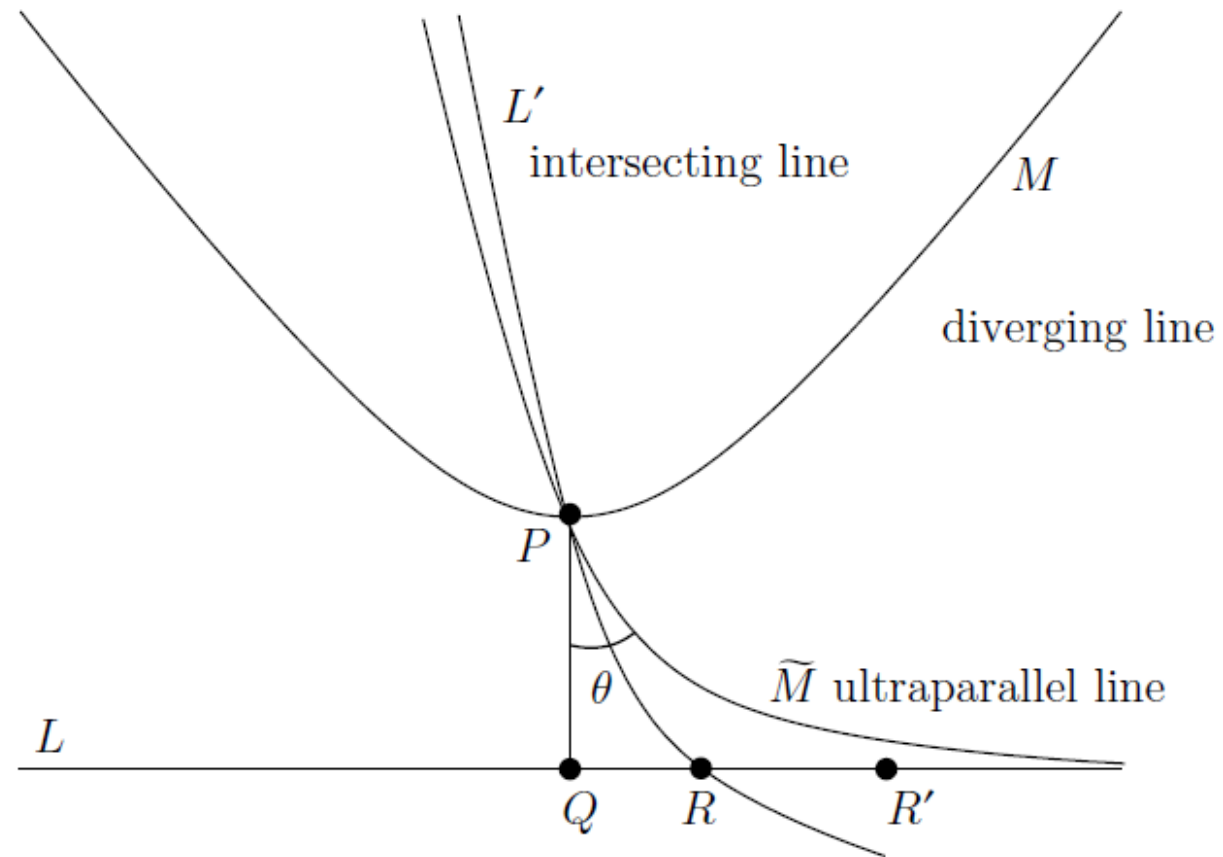


Perpendicular line

Asymptotically parallel

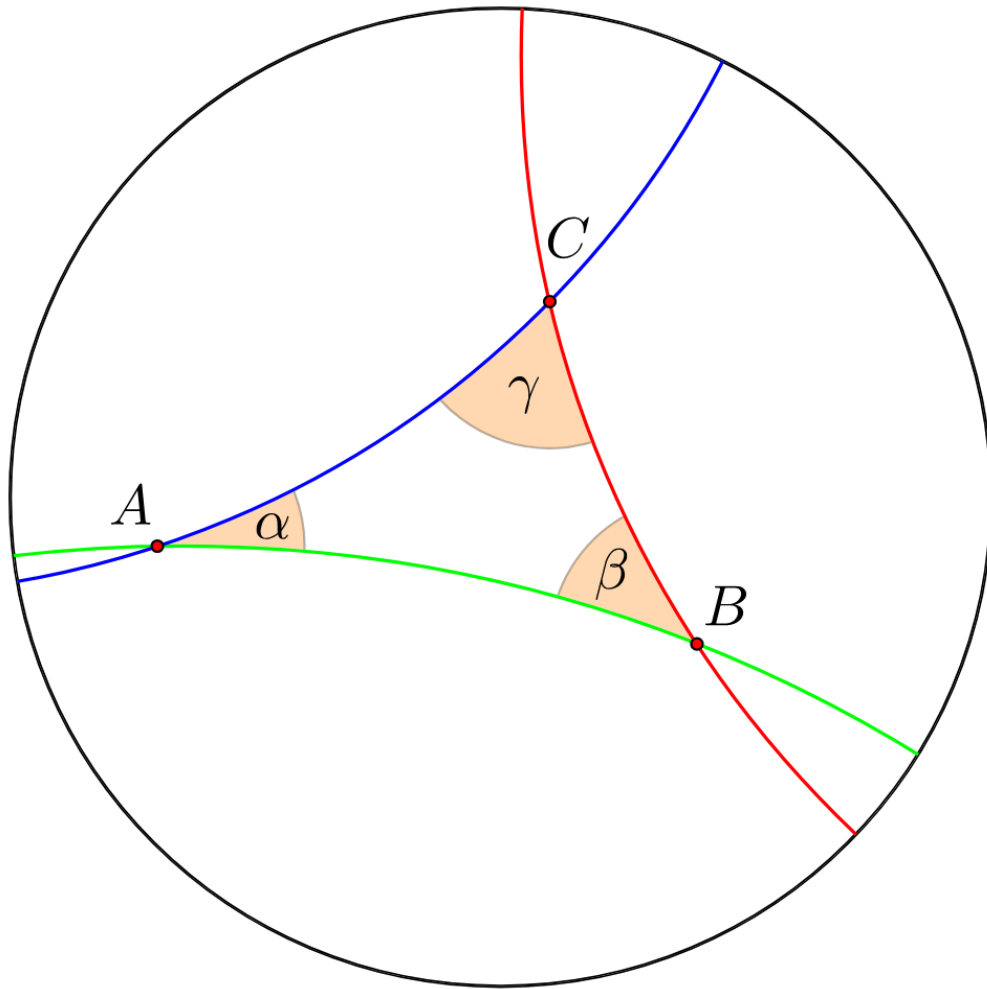


Poincare disk



유클리드 제 5공리 X

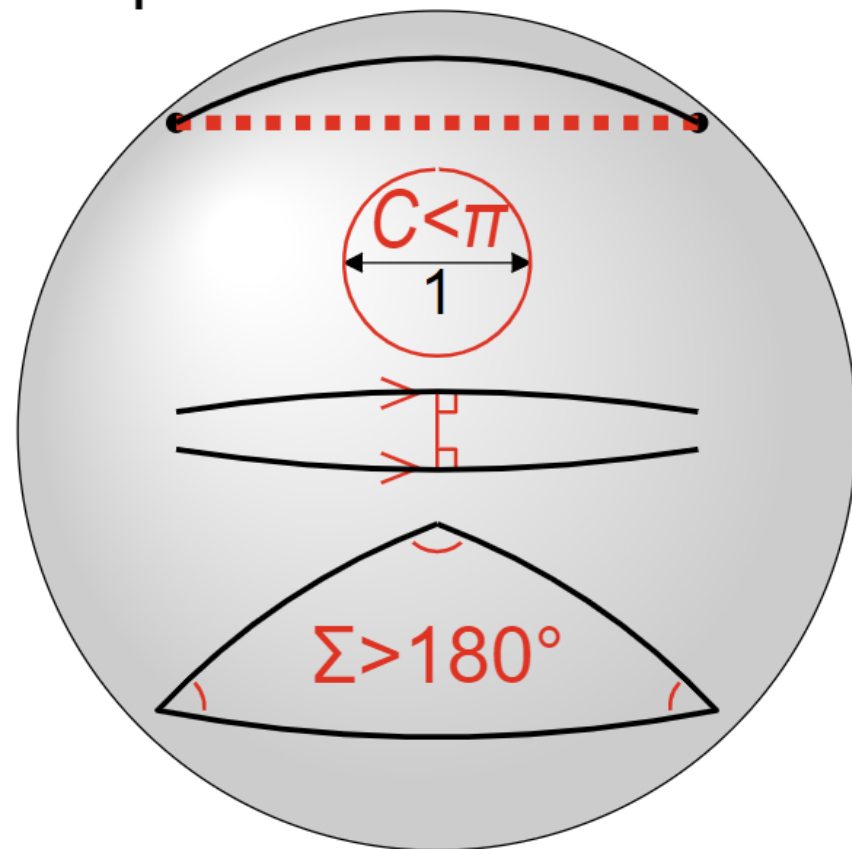
(직선 밖의 한 점을 지나는 평행선은 적어도 2개 있다.)



$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi - \text{area } \Delta ABC$$

Elliptic geometry

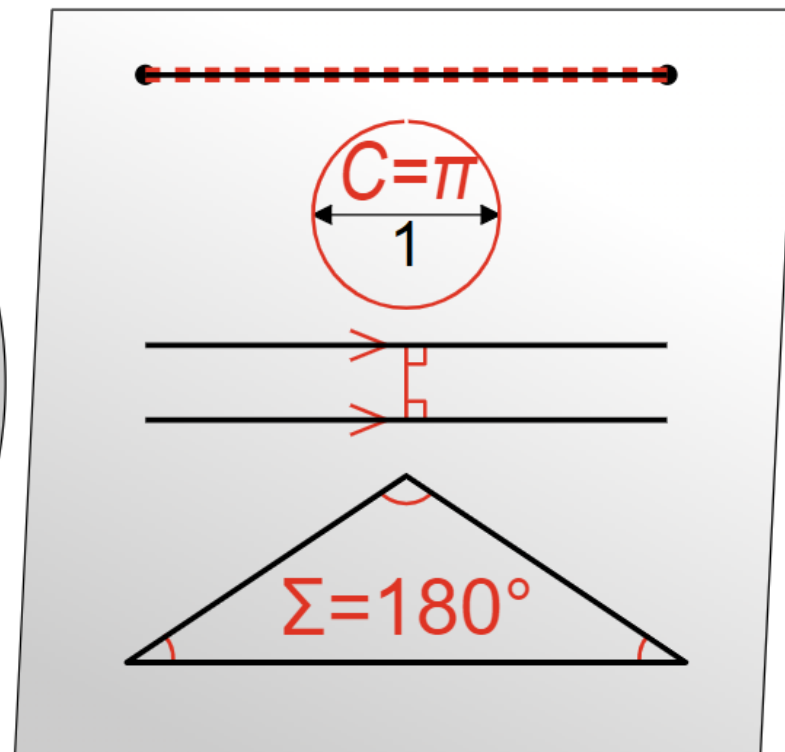
positive curvature



sphere

Euclidean geometry

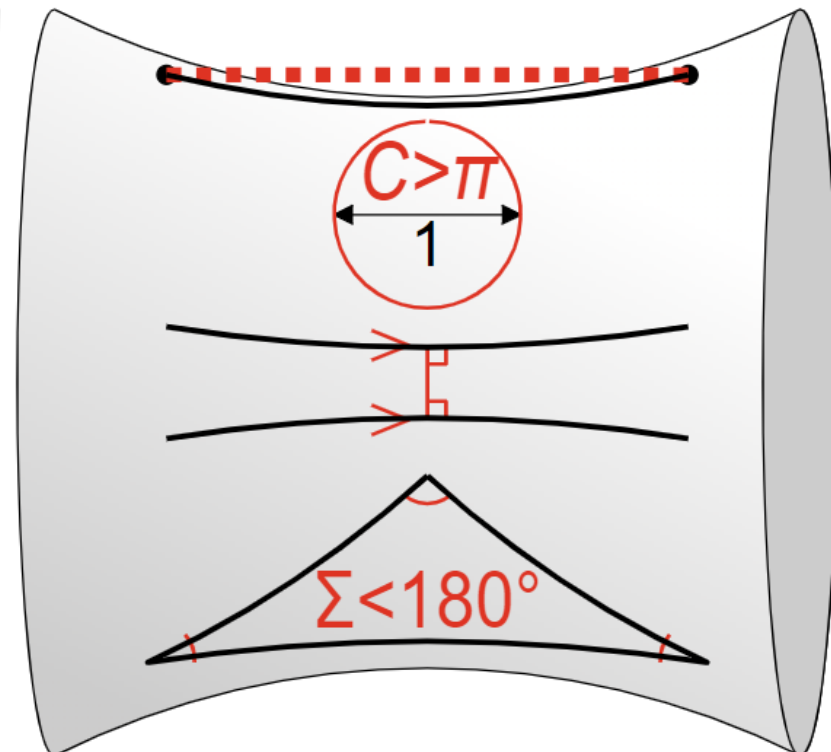
zero curvature



Euclidean plane

Hyperbolic geometry

negative curvature



saddle surface

감사합니다