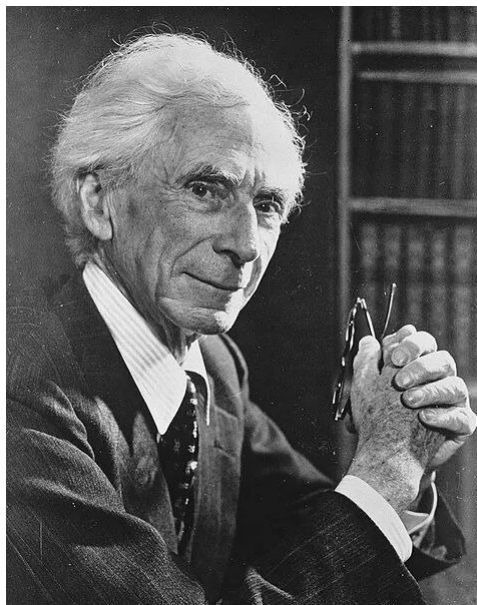
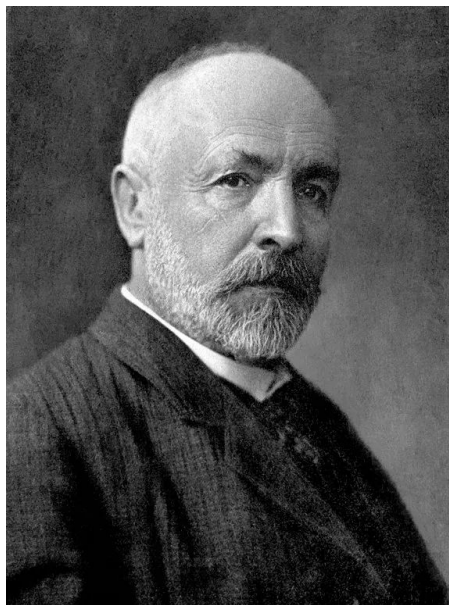


수학은 완벽한 학문인가

(부제 : 괴델 불완전성
정리)



2025.04.01 18:00

31316

한채영

공리

Axiom 1

1

공리

Axiom 2

2

공리

Axiom 3

3

정리

theorem

정리

theorem

정리

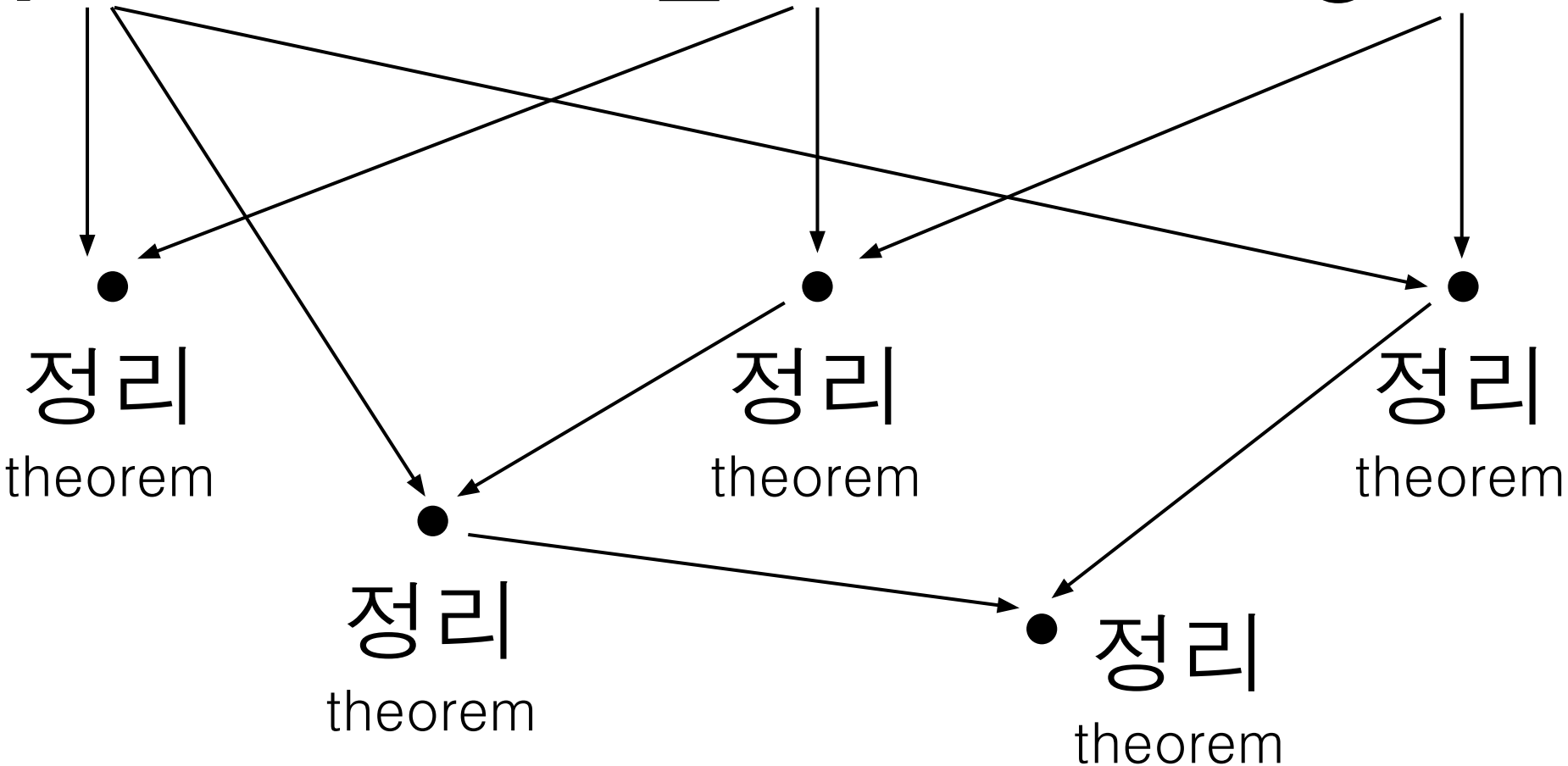
theorem

정리

theorem

정리

theorem





**Cantor's
Set Theory**

**Russell's
Paradox**

**Hilbert
Program**

**Gödel's
Incompleteness
Theorems**

Cantor's Set Theory

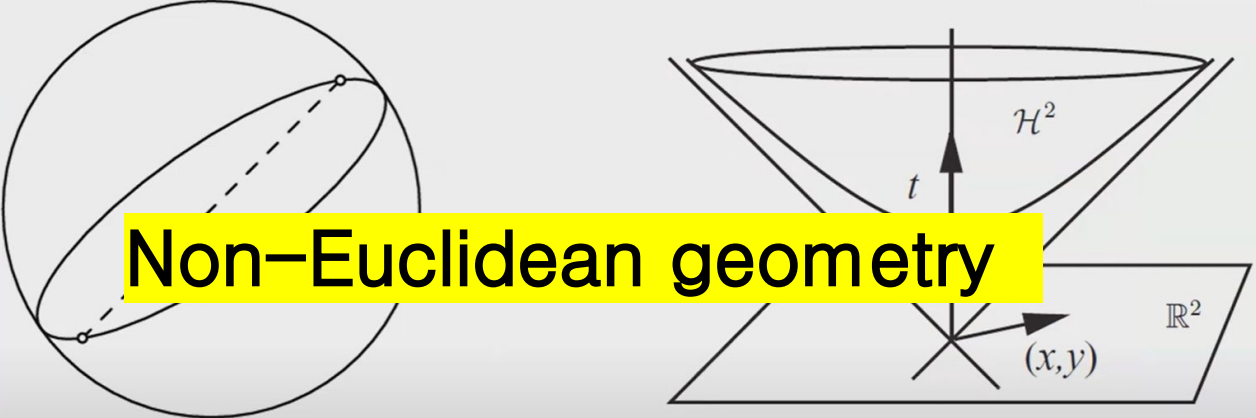
Russell's Paradox

Hilbert Program

Gödel's Incompleteness Theorems

Euclidean geometry

Non-Euclidean geometry



Spherical space

Hyperbolic space

Euclid's 5th postulate and non-Euclidean geometry

MIMIC SKKU
구독자 262명

구독중

5

공유

오프라인 저장

클립

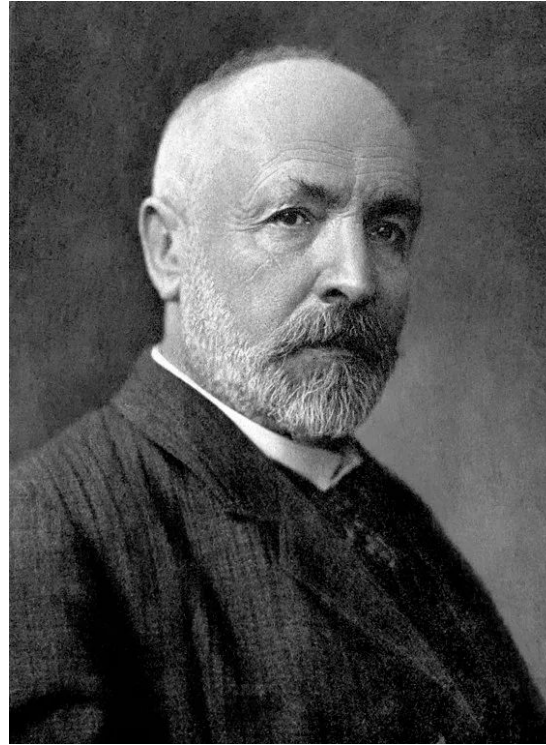
저장

Cantor's Set Theory

Russell's
Paradox

Hilbert
Program

Gödel's
Incompleteness
Theorems



Georg Cantor (1845 –
1918)

N

Cantor's Set Theory

Russell's Paradox

Hillbert Program

Gödel's Incompleteness Theorems

페아노 공리계 (Peano's Axioms, PA)

(1 $0 \in \mathbb{N}$

)

(2 $n \in \mathbb{N}$ 이면 $s(n) \in \mathbb{N}$ 이다.

)

(3 $n \in \mathbb{N}$ 이면 $s(n) \neq 0$ 이다.

)

(4 $s(n) = s(m)$ 이면 $n = m$ 이다.

)

(5 $S \subseteq \mathbb{N}$ 가 $0 \in S$ 이고 $n \in S$ 일 때 $s(n) \in S$ 이면 $S = \mathbb{N}$ 이다.

)

Cantor's Set Theory

Russell's
Paradox

Hilbert
Program

Gödel's
Incompleteness
Theorems

칸토어의 정리

$$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$$

칸토어의 역설

A 가 모든 집합들의 집합이라고 하자.

칸토어의 정리에 의해

하지만 $|\mathcal{P}(A)| \subset A$

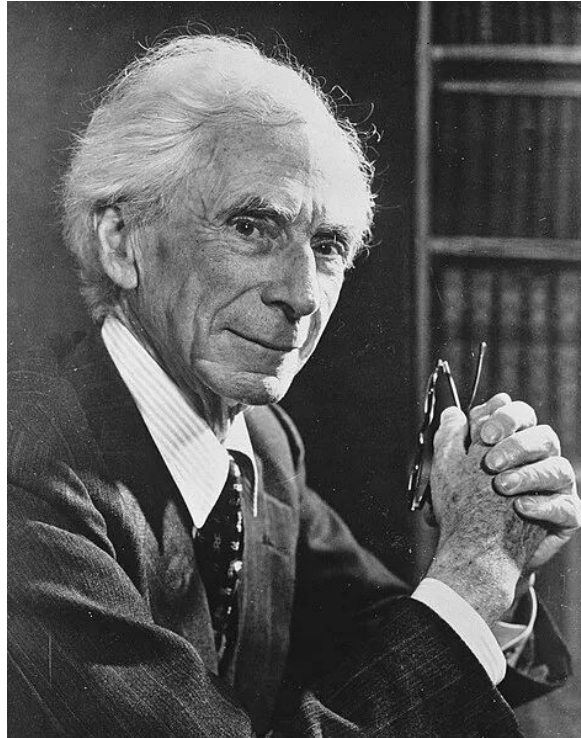
$$\therefore |A| \geq |\mathcal{P}(A)|$$

Cantor's
Set Theory

Russell's Paradox

Hilbert
Program

Gödel's
Incompleteness
Theorems



Bertrand Russell (1872 –
1970)



Cantor's
Set Theory

러셀의 역설

$A = \{x | x \notin x\}$ 라 하자.

Russell's Paradox

(i) $A \in A$

(ii) $A \notin A$

Hilbert
Program

Gödel's
Incompleteness
Theorems

러셀의 역설을 피하려면...

수학
Mathematics

무의미한 기호들이 명확하게 진술된
일련의 규칙을따르는 나열

‘ $2+3=5$ ’는 참이다.
‘ $2+3=5$ ’는 산술학적 형식문이다.

상위 수학
Meta Mathematics

수학에 관하여 언급하는 언어

$2+3=5$

Cantor's
Set Theory

Russell's
Paradox

Hilbert Program

Gödel's
Incompleteness
Theorems



David Hilbert (1862 –
1943)

Cantor's
Set Theory

Russell's
Paradox

Hilbert
Program

Gödel's Incompleteness Theorems



Kurt Gödel (1906 –
1978)

Gödel's Incompleteness Theorems

1. 괴델 수 부여

기호

상항 기호	괴델 수	일상적 의미
	1	아니다
	2	또는
	3	만일 ...라면 ...이다.
	4	...이 있다.
	5	같다
	6	영(0)
	7	바로 다음 수
	8	구두점 (왼쪽 괄호)
	9	구두점 (오른쪽 괄호)
,	10	구두점 (쉼표)
	11	더하기
	12	곱하기

숫자 변항	괴델 수	예시
		0
		ss0
문장 변항	괴델 수	예시
		0=0
술어 변항	괴델 수	예시

1. 괴델 수 부여

기호

형식문 (기호 나열)

$(\exists x)(x = sy)$

$(\exists x)(x = s0)$

증명 (형식문의 유한 나열)

$$2^m \times 3^n = k$$

상항 기호	괴델 수	일상적 의미
$\sim$	1	아니다
$\vee$	2	또는
$\supset$	3	만일 ...라면 ...이다.
$\exists$	4	...이 있다.
$=$	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
$($	8	구두점 (왼쪽 괄호)
$)$	9	구두점 (오른쪽 괄호)
$,$	10	구두점 (쉼표)
$+$	11	더하기
$\times$	12	곱하기

대응 보조 정리 correspondence lemma

- (1) 모든 각각의 원초 재귀적 진리는 PM의 기호 나열로 바뀌면 정리(Theorem)가 된다.
- (2) 형식적 기호들과 기대한 의미에 1대1 대응 관계가 존재한다.



공리로부터 반복적인 행위를 통해 항상 참임을 증명할 수 있는 진리

1. 괴델 수 부여

기호

형식문 (기호 나열)

$(\exists x)(x = sy)$ 의 괴델 수 $= m = x$

$(\exists x)(x = s0)$ 의 괴델 수 $= n = z$

증명 (형식문의 유한 나열)

$2^m \times 3^n = k$

상항 기호	괴델 수	일상적 의미
~	1	아니다
∨	2	또는
⊃	3	만일 ...라면 ...이다.
∃	4	...이 있다.
=	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	구두점 (왼쪽 괄호)
)	9	구두점 (오른쪽 괄호)
,	10	구두점 (쉼표)
+	11	더하기
×	12	곱하기

2. 상위수학의 산술화

상위수학적 진술

산술학적 진술

형식문 (PM)

' $\sim(0 = 0)$ '의 첫 번째 기호는 $\sim$ 이다.



괴델 수: $2^1 \times 3^8 \times 5^6 \times 7^5 \times 11^6 \times 13^9 = a$

$2|a$ 이고 $2^2 \nmid a$ 이다.

$(\exists x)(a = x \times ss0) \& \sim (\exists x)(a = x \times (ss0 \times ss0))$

$(\exists x)(ss \dots s0 = x \times ss0)$
 $\& \sim (\exists x)(ss \dots s0 = x \times (ss0 \times ss0))$

1. 괴델 수 부여

기호

형식문 (기호 나열)

$(\exists x)(x = sy)$ 의 괴델 수 $= m = x$

$(\exists x)(x = s0)$ 의 괴델 수 $= n = z$

증명 (형식문의 유한 나열)

$2^m \times 3^n = k$

상항 기호	괴델 수	일상적 의미
~	1	아니다
∨	2	또는
⊃	3	만일 ...라면 ...이다.
∃	4	...이 있다.
=	5	같다
0	6	영(0)
s	7	바로 다음 수
(	8	구두점 (왼쪽 괄호)
)	9	구두점 (오른쪽 괄호)
,	10	구두점 (쉼표)
+	11	더하기
×	12	곱하기

2. 상위수학의 산술화

상위수학적 진술

괴델 수 x 를 가진 형식문의 나열은
괴델 수 z 를 가진 형식문에 대한 증명이다.

산술학적 진술

$dem(x, z)$

형식문 (PM)

$Dem(x, z)$

3. 괴델의 증명

Definition

.

$sub(x, 17, x)$ 괴델 수 x 를 가진 형식문의
괴델 수 17을 가진 변항 기호에
괴델 수 x 를 대입할 때의 괴델 수

$Sub(x, 17, x)$ 괴델 수 $sub(x, 17, x)$ 와 대응하는
PM 속 형식문

3. 괴델의 증명

Theorem 1. (괴델의 제 1 불완전성 정리)

페아노 공리계를 포함하는 공리계는 불완전하다.

즉, 공리계 안에 참이지만 증명이 불가능한 명제가 존재한다.

proof.

- (1) 참이지만 증명 불가능한 문장인 형식문 G 를 만든다.
- (2) 형식문 G 가 그 형식적 부정문 $\sim G$ 도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다는 것을 밝힌다.
- (3) 형식문 G 가 형식적으로 증명될 수 없지만 옳은 산술학적 형식문이라는 것을 증명한다.
- (4) 형식문 G 가 옳으면서도 PM속에서 형식적으로 결정될 수 없기 때문에 불완전 체계여야 한다는 것을 밝힌다.

3. 괴델의 증명

(1) 참이지만 증명 불가능한 문장인 형식문 G 를 만든다.

$$(\exists x)Dem(x, z)$$

괴델 수 z 를 가진 형식문을 증명하는 괴델 수 x 를 가진 형식문 나열이 존재한다.

$$\sim(\exists x)Dem(x, z)$$

괴델 수 z 를 가진 형식문을 증명하는 괴델 수 x 를 가진 형식문 나열이 존재하지 않는다.
즉, 괴델 수 z 를 가진 형식문에 대한 증명은 불가능하다.

$$\sim(\exists x)Dem(x, Sub(y, 17, y)) \rightarrow \text{괴델 수} : n$$

괴델 수 $sub(y, 17, y)$ 를 가지는 형식문에 대한 증명은 불가능하다.

$$\sim(\exists x)Dem(x, Sub(n, 17, n)) \rightarrow \text{괴델 수} : g$$

'괴델 수 $sub(y, 17, y)$ 를 가지는 형식문에 대한 증명은 불가능하다.'는 형식문에 대한 증명은 불가능하다.

3. 괴델의 증명

(1) 참이지만 증명 불가능한 문장인 형식문 G 를 만든다.

$\sim(\exists x)Dem(x, Sub(y, 17, y)) \rightarrow$ 괴델 수 : n

괴델 수 $sub(y, 17, y)$ 를 가지는 형식문에 대한 증명은 불가능하다.

$\sim(\exists x)Dem(x, Sub(n, 17, n)) \rightarrow$ 괴델 수 : g

' $Sub(y, 17, y)$ 에 대한 증명은 불가능하다.'는 형식문에 대한 증명은 불가능하다.

$sub(n, 17, n)$

괴델 수 n 을 가진 형식문의

괴델 수 17을 가진 변항 기호에

괴델 수 n 을 대입할 때의 괴델 수

$\sim(\exists x)Dem(x, sub(y, 17, y))$

$\sim(\exists x)Dem(x, sub(n, 17, n))$

괴델 수 : g

$\therefore g = sub(n, 17, n)$

3. 괴델의 증명

(2) 형식문 G 가 그 형식적 부정문 $\sim G$ 도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다는 것을 밝힌다.

형식문 G 는 PM의 규칙을 사용해서 증명할 수 없다.


$$G: \sim(\exists x)Dem(x, Sub(n, 17, n)) = Sub(n, 17, n)$$

$$\sim G: (\exists x)Dem(x, Sub(n, 17, n)) \\ = G$$

3. 괴델의 증명

Theorem 1. (괴델의 제 1 불완전성 정리)

페아노 공리계를 포함하는 공리계는 불완전하다.

즉, 공리계 안에 참이지만 증명이 불가능한 명제가 존재한다.

proof.

- (1) 참이지만 증명 불가능한 문장인 형식문 G 를 만든다.
- (2) 형식문 G 가 그 형식적 부정문 $\sim G$ 도 같이 증명될 수 있는 경우에만 증명될 수 있다는 것을 밝힌다.
- (3) 형식문 G 가 형식적으로 증명될 수 없지만 옳은 산술학적 형식문이라는 것을 증명한다.
- (4) 형식문 G 가 옳으면서도 PM속에서 형식적으로 결정될 수 없기 때문에 불완전 체계여야 한다는 것을 밝힌다.

수학은 완벽한가?