
고전물리의 범주론적 해석

— 가환대수와 불 대수를 중심으로 —

목차

- 범주론 기초 용어 정리와 가환대수,
- 고전물리: 단진동 모델과 역학의 흐름
 - 뉴턴역학 $\rightarrow$ 라그랑주역학 $\rightarrow$ 해밀턴역학
- 가환대수: 공간 $\rightarrow$ 가환대수
- 불 대수: 사건 $\rightarrow$ 불 대수
- 확장 ... (?) : 비가환의 영역으로

범주의 구성요소

범주 $\mathcal{C}$ 는 다음 4 종류의 구성요소로 이루어져있다.

1. 대상의 모임 $\text{Ob}(\mathcal{C})$

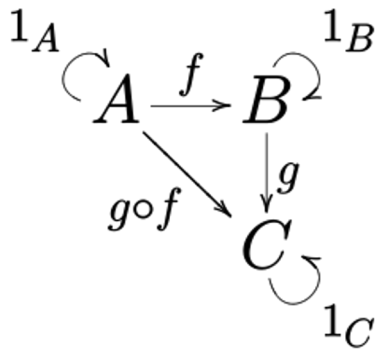
2. 대상 $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대한

대상 a 에서 대상 b 까지로의 사상의 모임 $\mathcal{C}(a, b)$

3. 대상 $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대한 항등원 $id_a \in \mathcal{C}(a, a)$

4. 대상 $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대한 사상의 합성

$$f \in \mathcal{C}(a, b), g \in \mathcal{C}(b, c) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}(a, c)$$



대상과 사상

대상(object):

범주가 갖는 대상의 모임은 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 로 표기하며,
 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 의 원소를 **대상**이라 한다.

사상(morphism):

범주가 갖는 사상의 모임은 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 로 표기하며,
 $\text{Mor}(\mathcal{C})$ 의 원소를 **사상**이라 한다.
사상은 map, arrows라고도 불린다

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$A = \text{dom}(f) \quad B = \text{cod}(f)$$

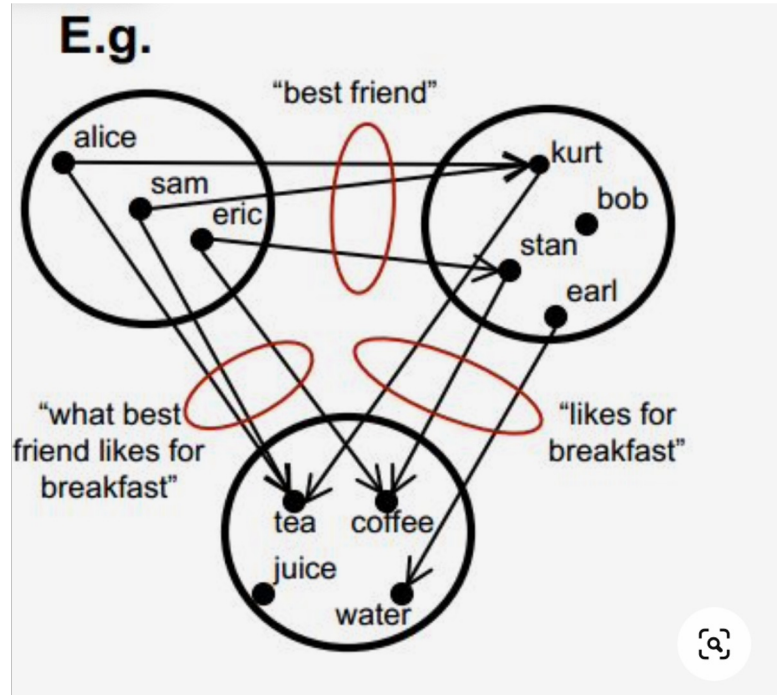
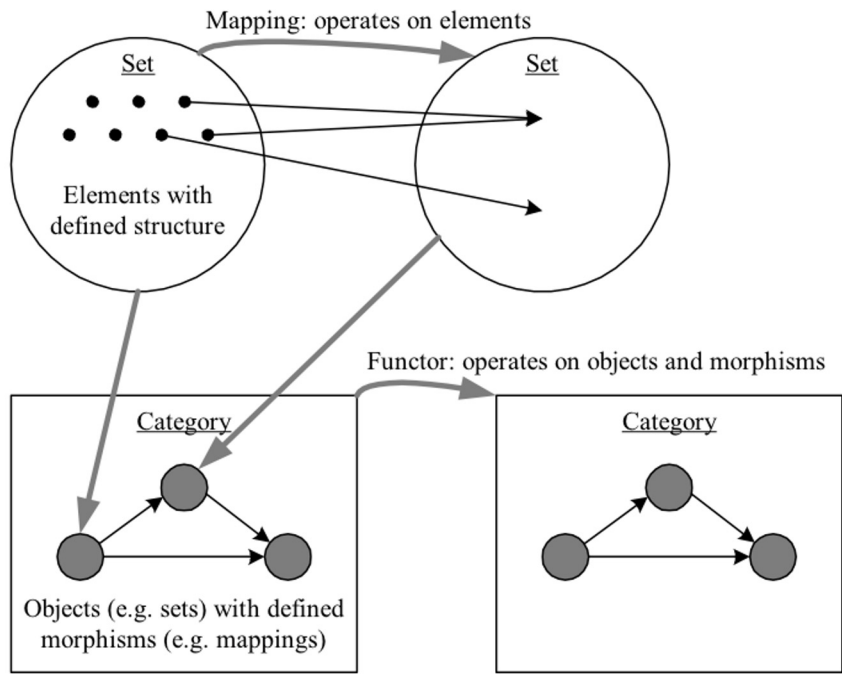
정의역

공역

사상 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 를

$f : A \rightarrow B$ 라 표기 하기도 한다.

예시



사상의 합성과 항등원

임의의 $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대해 ,

이항연산은 **합성**(composition)이라고 하며,

임의의 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 에 대해 다음의 성질을 만족한다.

결합법칙 : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

항등원 : $(f \circ 1_A = 1_B \circ f = f)$

Functor: 범주와 범주 사이의 사상

def. 함자 (Functor)

범주 $\mathcal{C}$ 부터 범주 $\mathcal{D}$ 까지의 functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 는 다음 두 가지 데이터를 대응시키는 구조이다.

1. $\mathcal{C}$ 의 각 대상 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대해
 $\mathcal{D}$ 의 대상 $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 를 대응시킨다.
2. $\mathcal{C}$ 의 각 사상 $f : X \rightarrow Y$ 에 대해
 $\mathcal{D}$ 의 사상 $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ 를 대응시킨다.

단, 이 대응은 다음 두 조건을 만족해야 한다.

1. (항등사상 보존) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$
2. (사상의 합성 보존) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & F_a \\ f \downarrow & & \downarrow F_f \\ b & \longmapsto & F_b \end{array}$$

자연변환

def. 자연변환 (natural transformation)

범주 $\mathcal{C}$ 에서 $\mathcal{D}$ 으로의 두개의 functor

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

가 주어졌다고 하자.

Functor F 에서 G 으로의 자연변환은

범주 $\mathcal{C}$ 의 대상 $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 라 주어진 범주 $\mathcal{D}$ 의 사상

$$\phi_a : F(a) \rightarrow G(a)$$

의 모임 $\{\phi_a | a \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}$ 가 있다.

단, 이 사상들은 다음의 자연성 조건을 만족해야한다.

$cf)$ 자연성 조건

범주 $\mathcal{C}$ 의 임의의 사상 $f : a \rightarrow b$ 에 대해
다음 diagram이 교환가능하다.

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(f)} & F(b) \\ \downarrow \phi_a & & \downarrow \phi_b \\ G(a) & \xrightarrow{G(f)} & G(b) \end{array}$$

$$\text{즉, } \phi_b \circ F(f) = G(f) \circ \phi_a$$

가 성립한다.

동형과 동치

def. 동형(isomorphism)

범주 $\mathcal{C}$ 에서 두 대상 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 가 동형이라는 것은 사상 $f: X \rightarrow Y$ 와 사상 $g: Y \rightarrow X$ 가 존재하여, 다음 두 조건을 만족한다는 뜻이다.

$$g \circ f = \text{id}_X$$

$$f \circ g = \text{id}_Y$$

이때 사상 f 를 동형사상이라고 하며, g 는 f 의 역사상이라고 한다.

이를 기호로는 보통 다음과 같이 쓴다.

$$X \cong Y \quad \text{또는} \quad f: X \xrightarrow{\sim} Y$$

라고 쓴다.

def. 동치 (equivalence) $F \cong G$

2개의 범주 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 가 서로 동치라는 것은, 두개의 functor

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

와 두개의 자연동치

$$\phi: G \circ F \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$$

$$\psi: F \circ G \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

가 존재한다는 것이다.

cf) 보조정리 자연 동치(natural equivalence)

$\psi: F \Rightarrow G$ 가 자연동치인 경우,

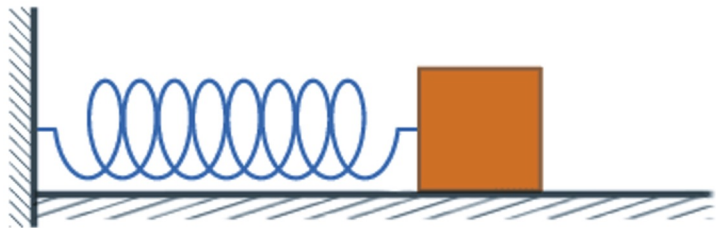
범주 $\mathcal{C}$ 의 각 대상 $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 에 대해

ψ 의 a 성분 ψ_a 의 역사상 ψ_a^{-1} 를 모은

$$\{\psi_a^{-1} | a \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}$$

는 G 에서 F 으로의 자연 변환이다

단진동 모델과 solution



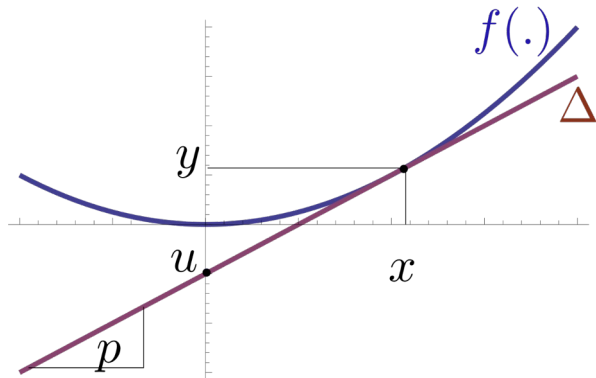
세가지 역학의 구조 (단진동의 상황에서)

뉴턴 형식: 힘과 가속도, $Q = \mathbb{R}$

라그랑주 형식: 접다발 TQ 위의 위치와 속도

해밀턴 형식: 여접다발 $P = T^*Q$ 위의 위치와 운동량

$$(x, y) \rightarrow (p, u)$$



정칙 라그랑주계들의 범주: Lag_{reg}

해밀턴계들의 범주: Ham_{reg}

Legendre transform은 functor

$$\mathcal{L} : \text{Lag}_{reg} \rightarrow \text{Ham}_{reg}$$

$$\text{대상: } (Q, L) \mapsto (T^*Q, H)$$

$$\text{해: } (q(t), \dot{q}(t)) \mapsto (q(t), p(t))$$

정칙 조건에서 Legendre transform이 가역이면,

이 functor는 범주 동치를 준다.

$$\text{Lag}_{reg} \simeq \text{Ham}_{reg}$$

세 관점의 물리

상태공간 관점:

한 점 $x \in P$ 가 현재 상태다.

물리량 대수 관점:

상태공간 위의 함수 $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

또는 $\mathbb{C}$ 가 물리량이다.

사건/논리 관점:

“ $f(x) \in \Delta$ 인가?” 같은

예/아니오 질문이 사건이며,

사건들은 불 대수를 이룬다.

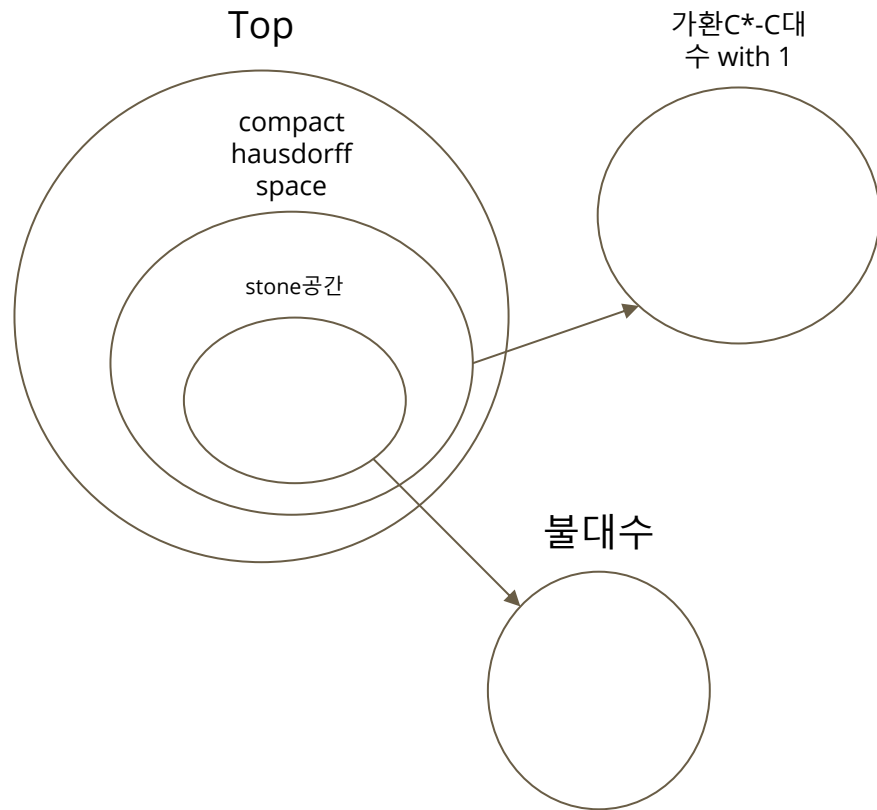
전체 요약

$$P = T^*Q \quad \longmapsto \quad A = C(P)$$

$$x \in P \quad \longmapsto \quad \text{ev}_x : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu \quad \longmapsto \quad \varphi_\mu(f) = \int f d\mu$$

$$B = \{x : f(x) \in \Delta\} \quad \longmapsto \quad \chi_B$$



물리량 대수 관점

고전물리에서 상태공간을 P , 물리량들의 가환대수를 A 라고 하자.

예를 들어

$$A = C^\infty(P, \mathbb{C}) \quad \text{또는} \quad A = C^\infty(P, \mathbb{R})$$

로 둘 수 있다.

각 물리량 $f \in A$ 는 상태 $x \in P$ 에서 하나의 값 $f(x)$ 를 가진다.

따라서 가장 기본적인 pairing은 다음과 같다.

$$E : P \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$E(x, f) = f(x)$$

여기서 x 는 상태이고, f 는 물리량이다.

평가 사상

평가 pairing

$$E : P \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

를 고정된 상태 $x \in P$ 에 대해 보면, 다음과 같은 사상이 얻어진다.

$$\text{ev}_x : A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{ev}_x(f) = f(x)$$

따라서 각 상태 x 는 물리량 대수 A 에서 스칼라체 $\mathbb{C}$ 로 가는 평가 사상을 결정한다.

즉,

$$x \longmapsto \text{ev}_x$$

이다.

$$\text{ev}_x \in \text{Hom}_{\text{CAlg}}(A, \mathbb{C})$$

기댓값 사상

$$\bar{E} : \text{Prob}(P) \times A \rightarrow \mathbb{C}$$

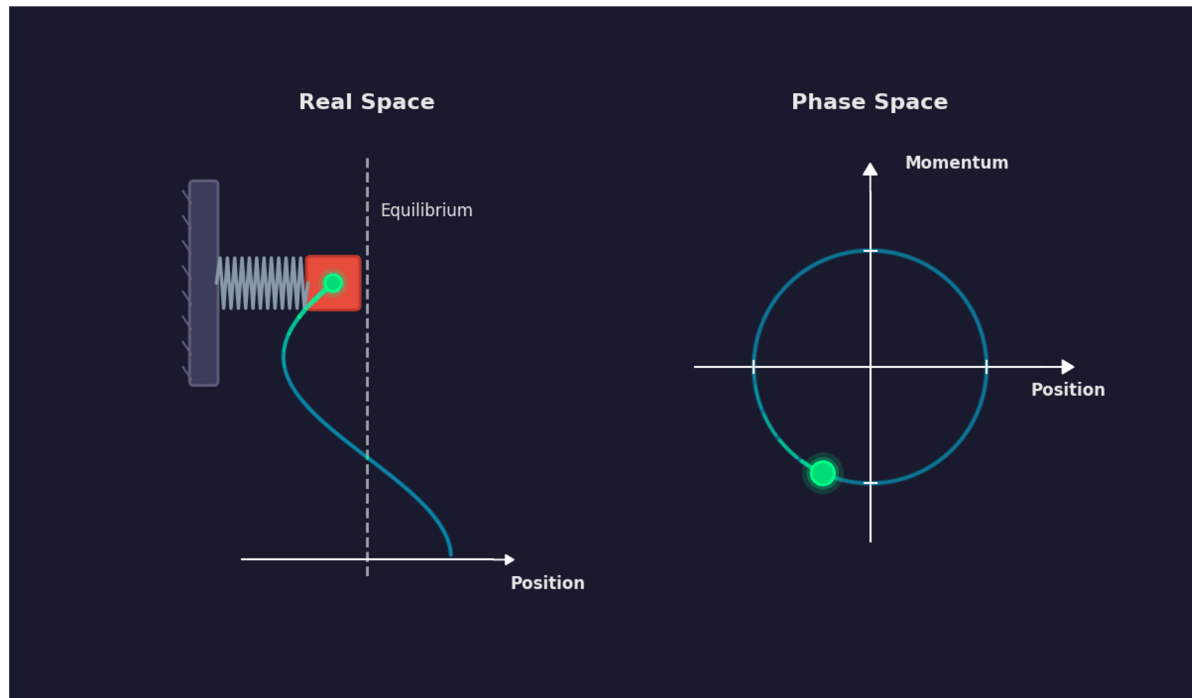
$$\bar{E}(\mu, f) = \int_P f d\mu$$

각 확률상태 μ 는 선형함수

$$\varphi_\mu : A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_\mu(f) = \int_P f d\mu$$

를 정의한다. 이 φ_μ 는 양의 정규화된 선형함수이므로 C^* -대수론에서 말하는 state이다.

사건 논리 관점(불 대수)



이 운동의 에너지가 E_0 보다 낮은가? 라는 질문은

$$B = \{(q, p) \in P : H(q, p) \leq E_0\}$$

이처럼 표현될 수 있다.

불 연산은

$$B \wedge C = B \cap C$$

$$B \vee C = B \cup C$$

$$\neg B = P \setminus B$$

이러한 연산을 가진다.

특성함수를 이용하면,

$$\chi_B : P \rightarrow \{0, 1\}$$

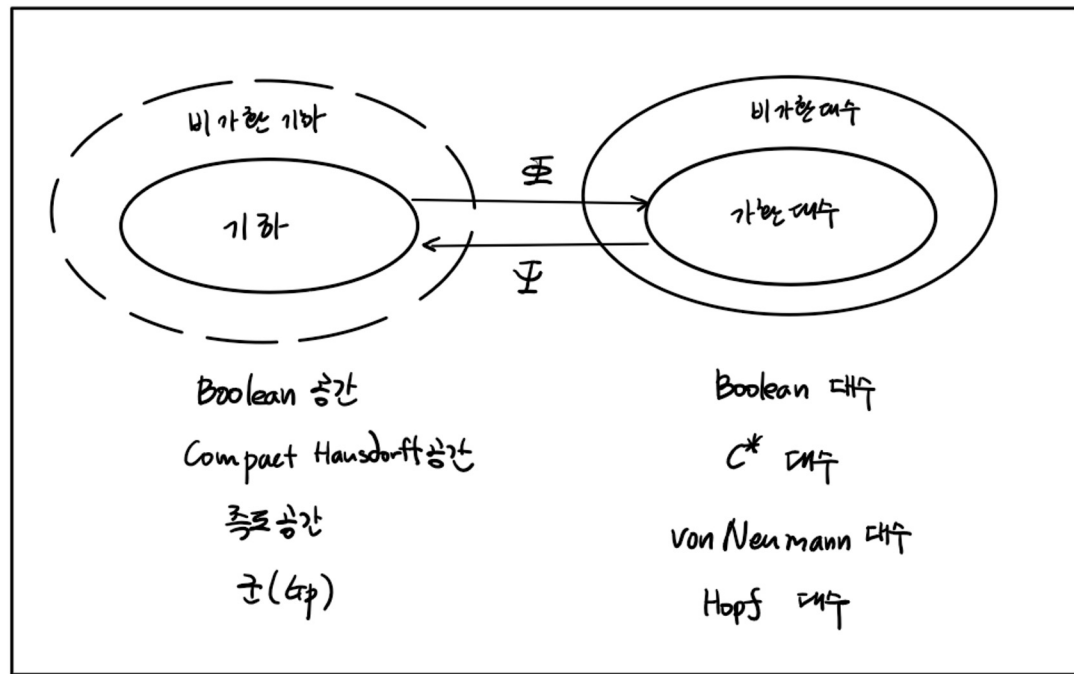
$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

기댓값이

$$\bar{E}(\mu, \chi_B) = \int_P \chi_B d\mu = \mu(B)$$

로 변환다.

확장의 영역...



$$P = T^*Q \longmapsto A = C(P)$$

$$x \in P \longmapsto \text{ev}_x : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu \longmapsto \varphi_\mu(f) = \int f d\mu$$

$$B = \{x : f(x) \in \Delta\} \longmapsto \chi_B$$

참고 자료 및 도구

다이어그램 작성 도구 : tikzcd (<https://tikzcd.yichuanshen.de/>)

범주론 참고 교재 : はじめての圏論 : ブンゲン先生の現代数学入門 (加藤文元)