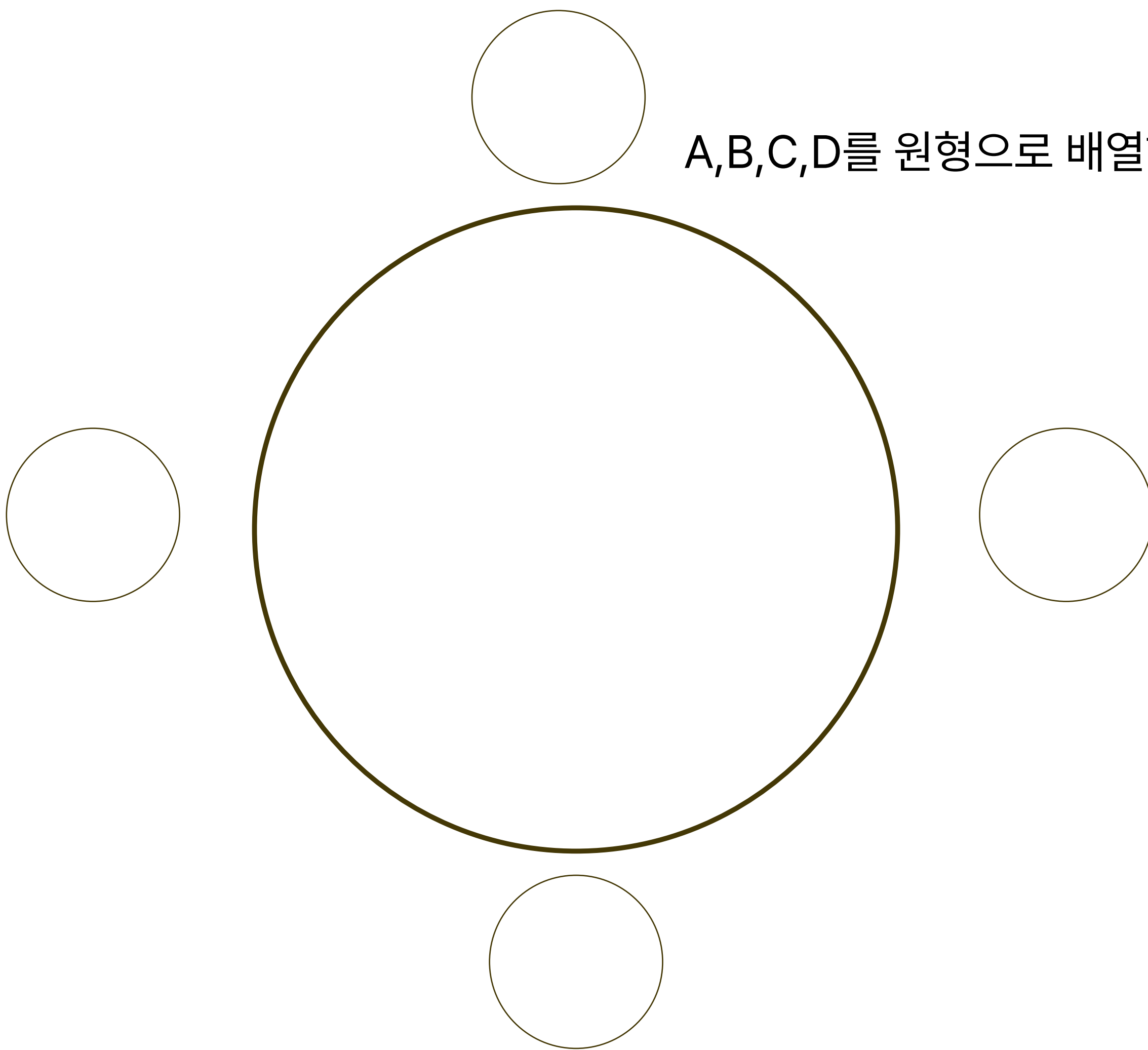


Counting with Symmetry

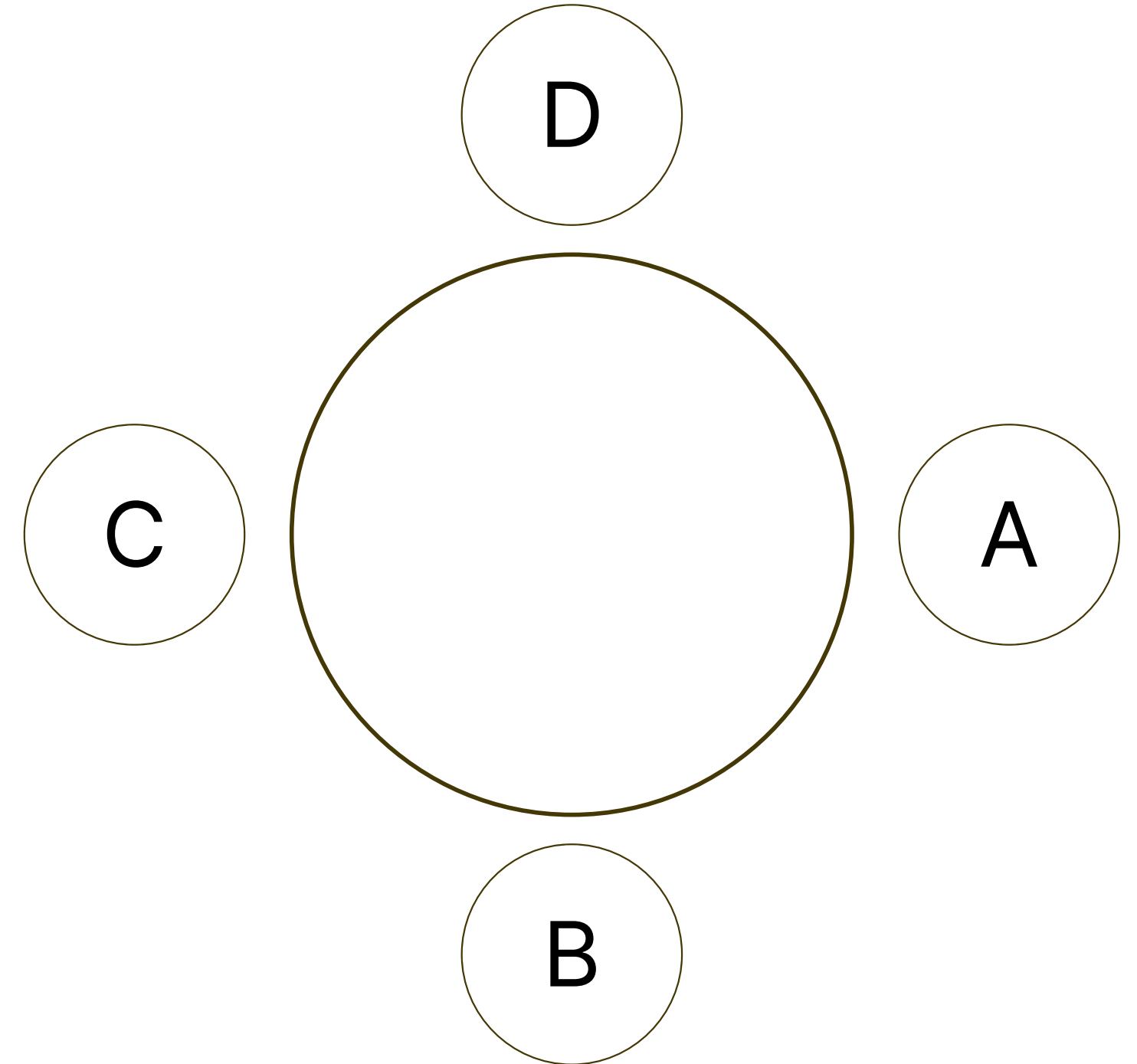
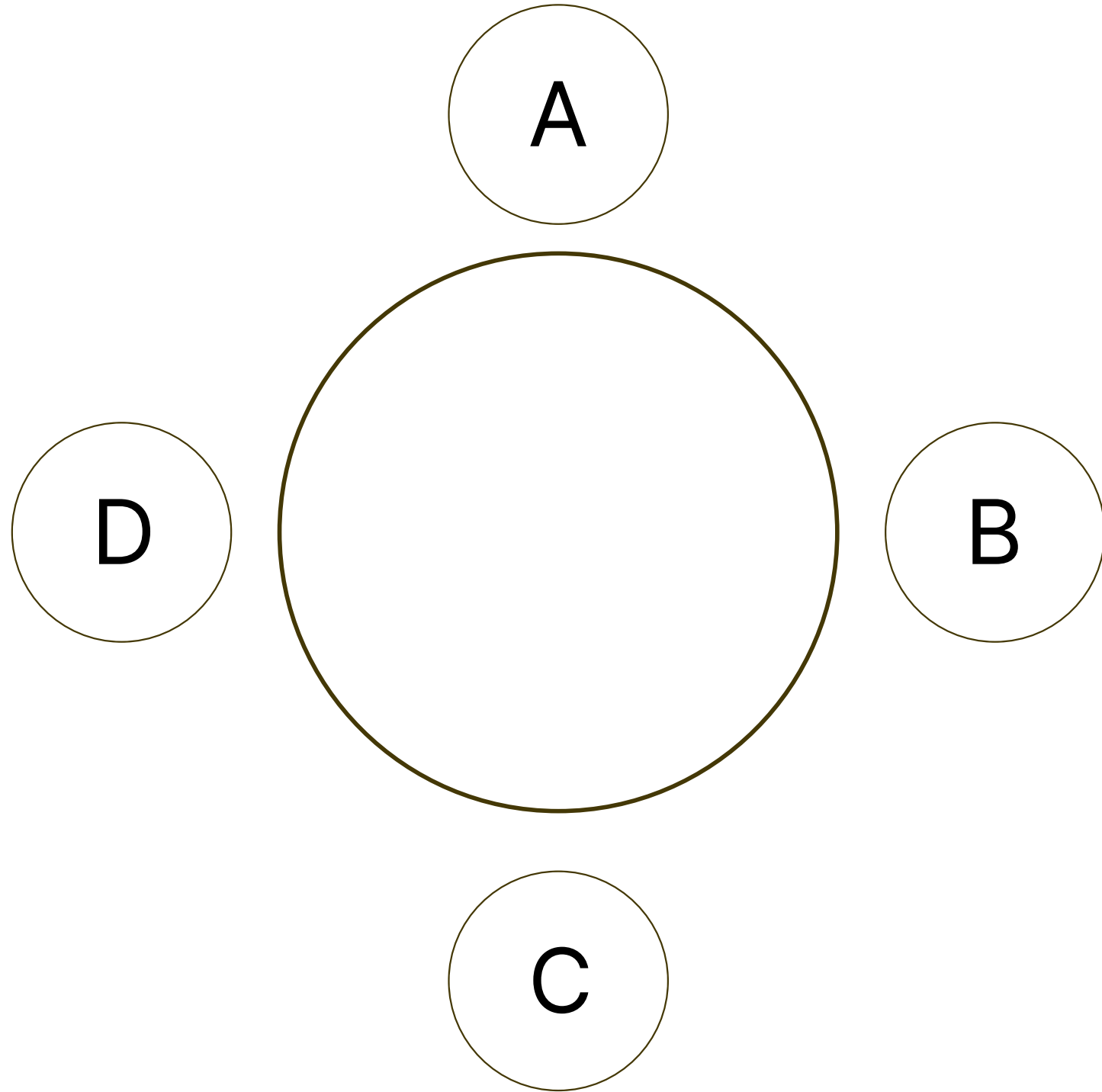
홍선우

원순열

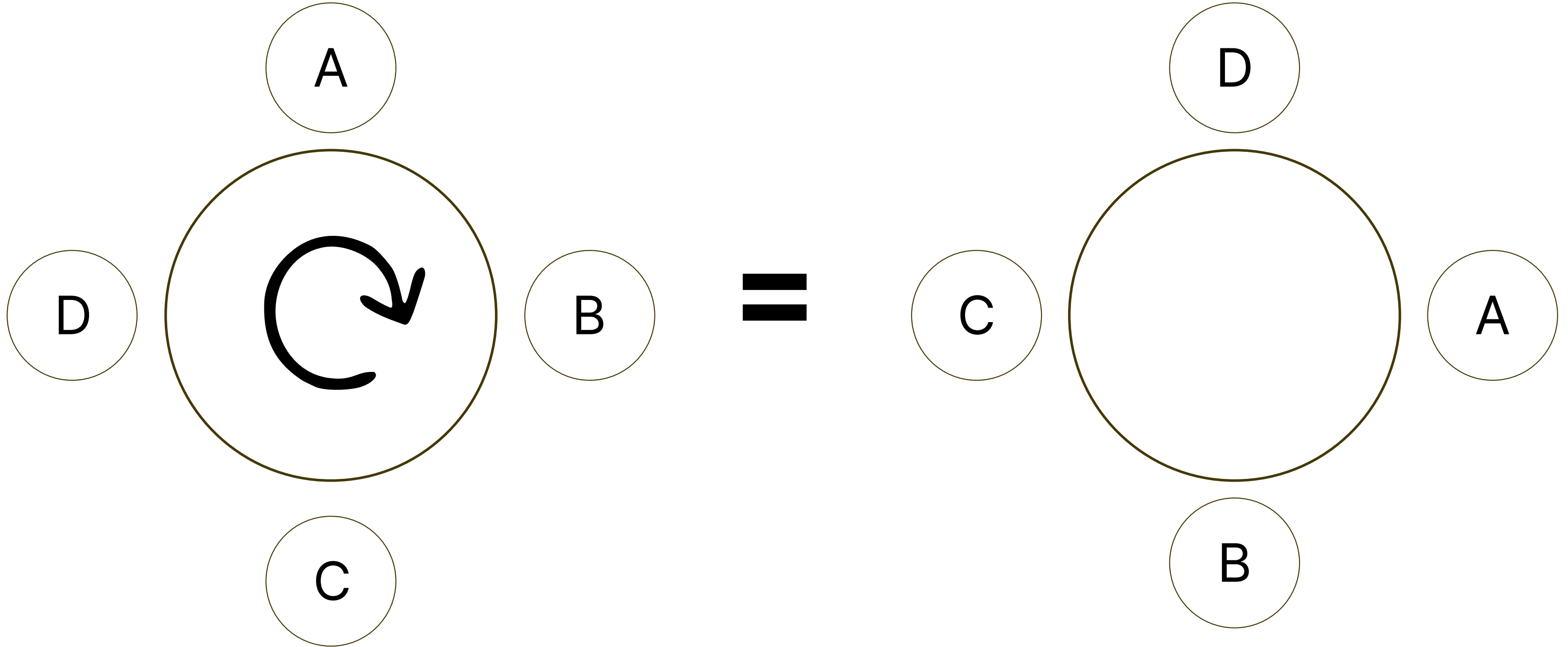
A,B,C,D를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하자



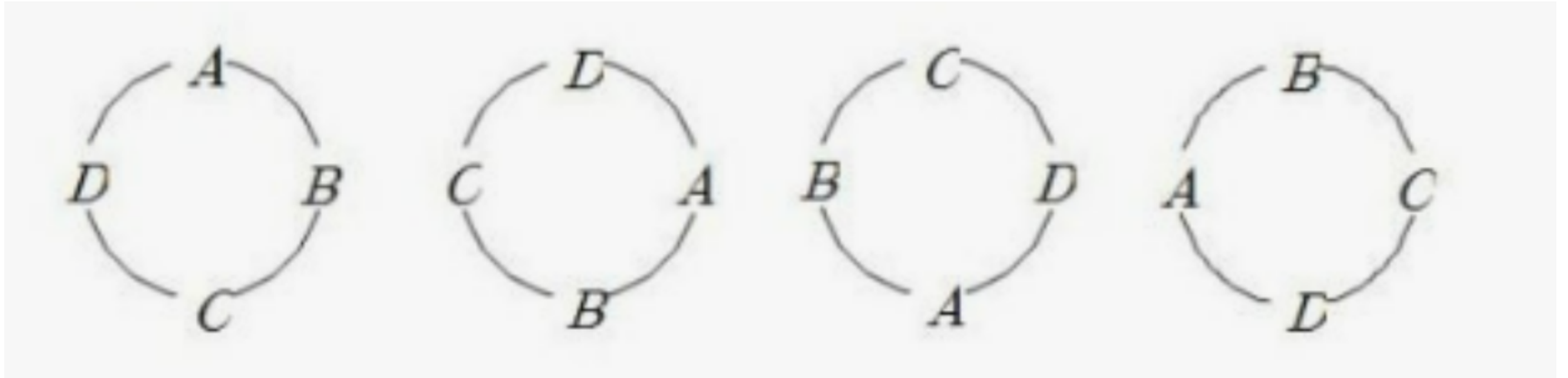
원순열



원순열



원순열



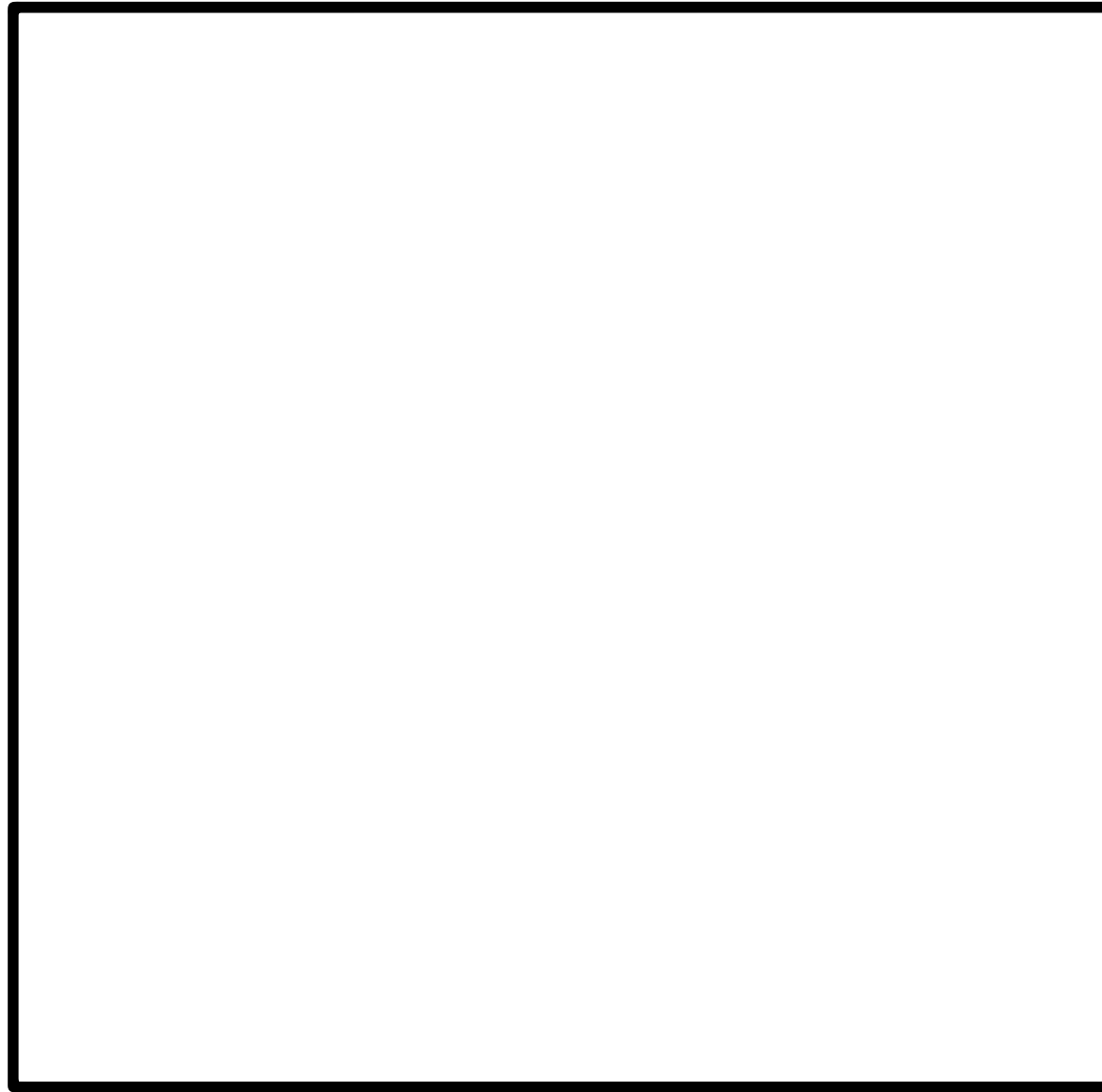
일렬로 배열하는 경우의 수 $4!$ 회전 했을 때 같은 경우의수가 4가지씩 있으니까 4로 나누면 원순열의 경우의 수는 6이 나온다

대칭이란

회전시켰을 때 서로 같아지는 배열은 같은 것으로 본다

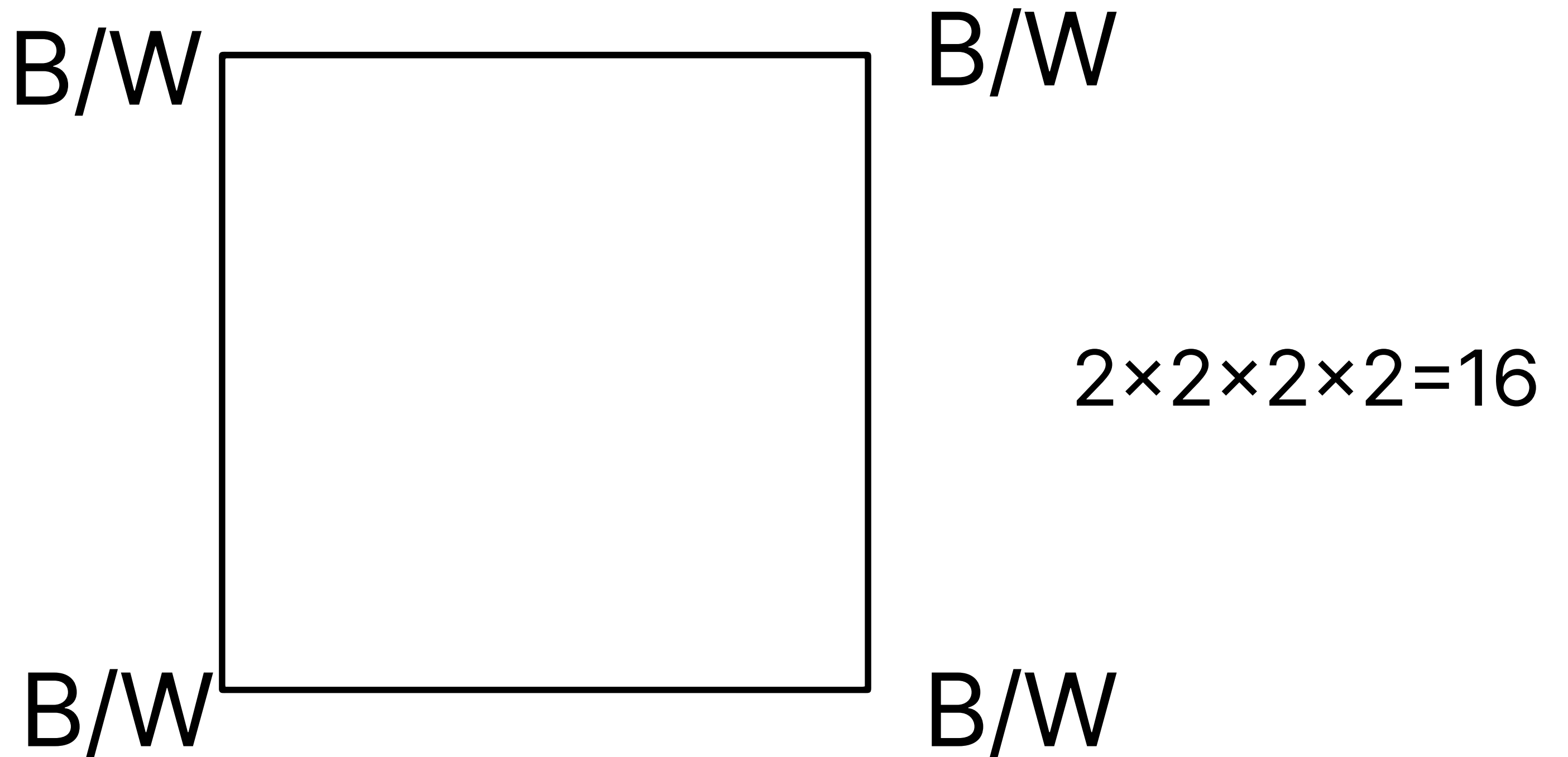
경우의 수 세기

B/W



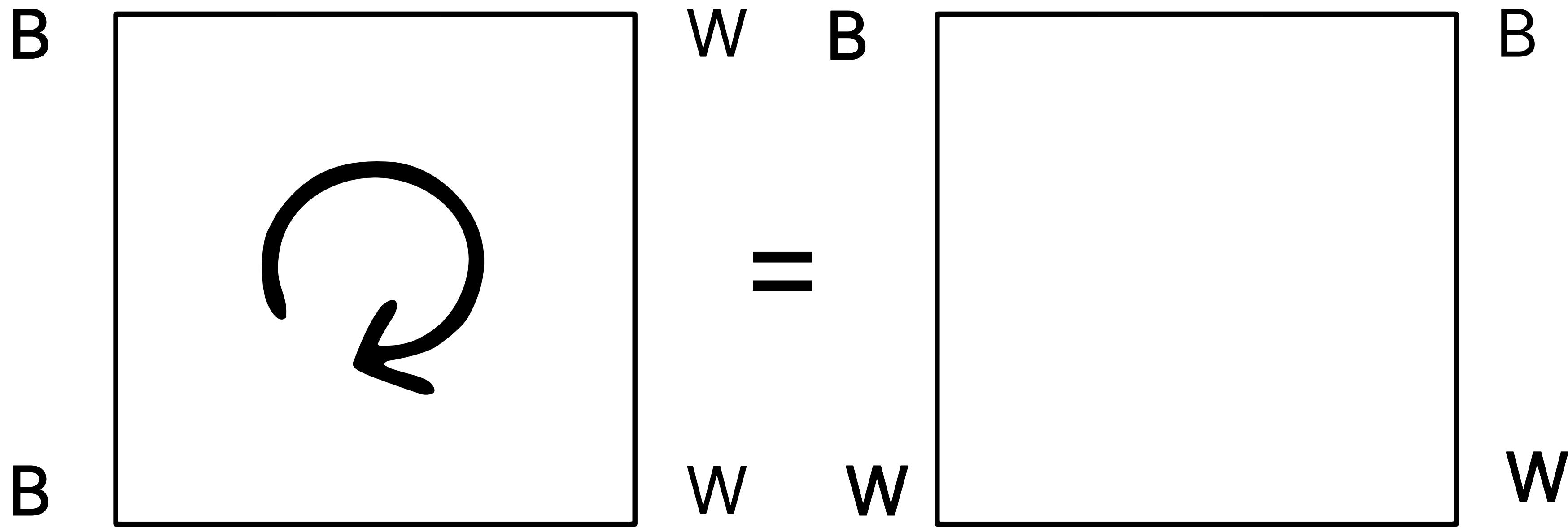
정사각형의 꼭짓점에 검정색 아니면 흰색으로 색칠하는 경우의 수를 구한다고 하자

경우의 수 세기



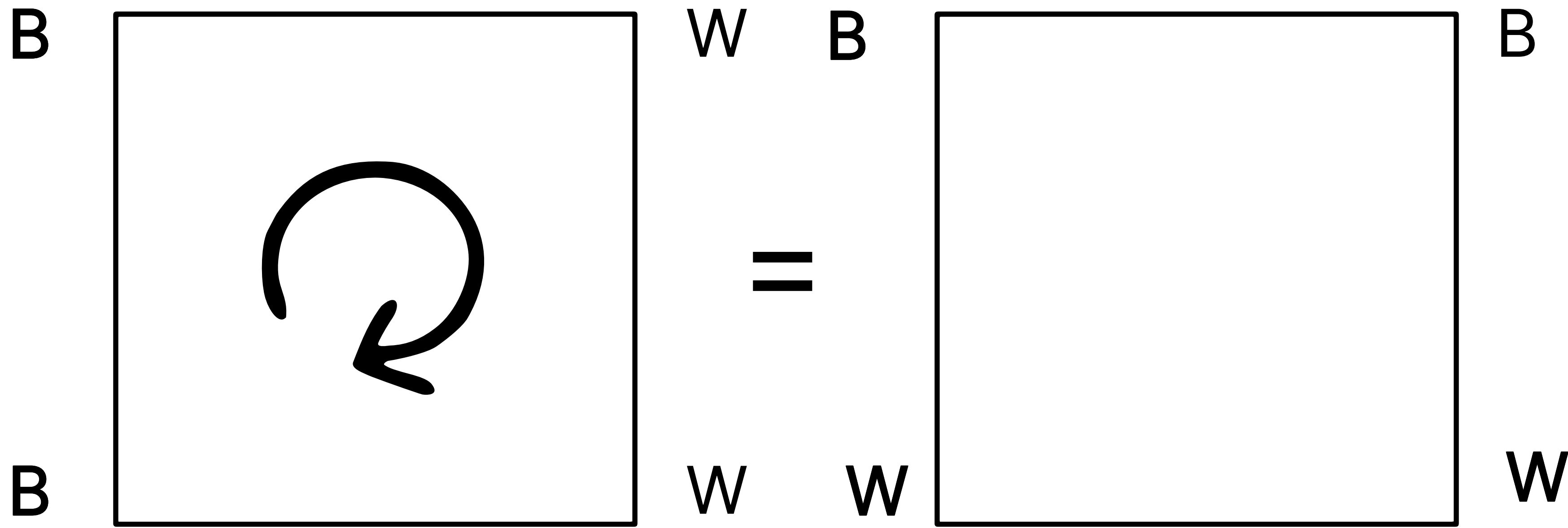
전체 경우의 수는 16가지가 나온다.

회전을 고려하면 어떻게 될까?



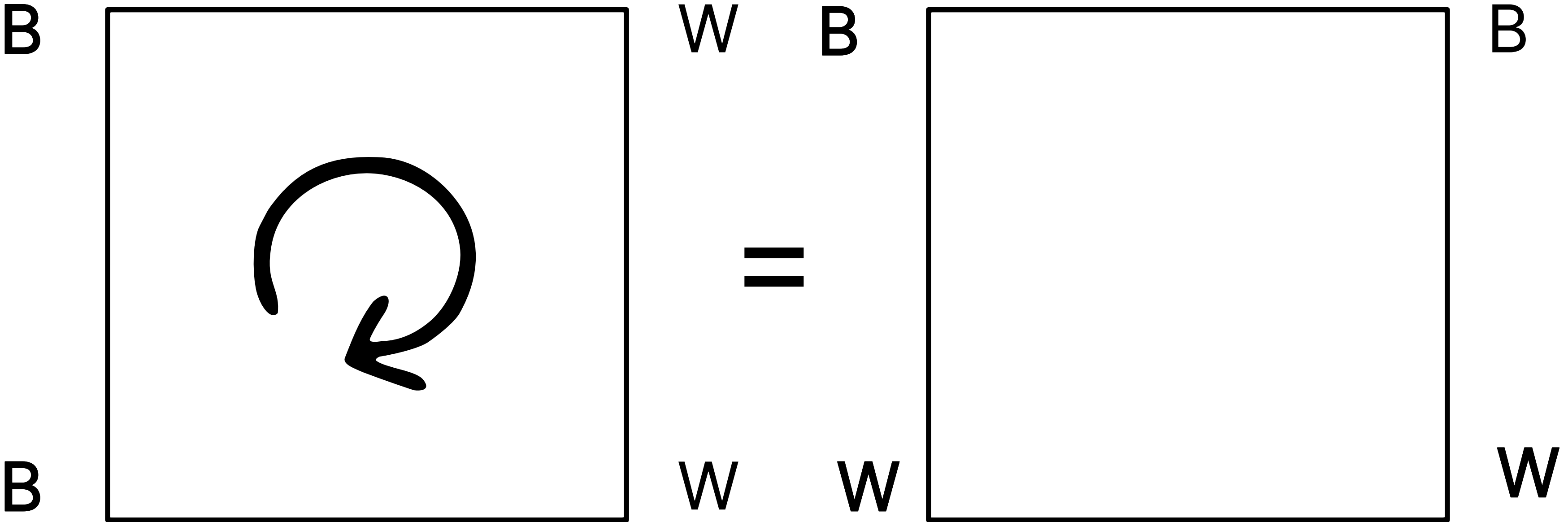
이런 경우의 수는 어떻게 셀까?

회전을 고려하면 어떻게 될까?



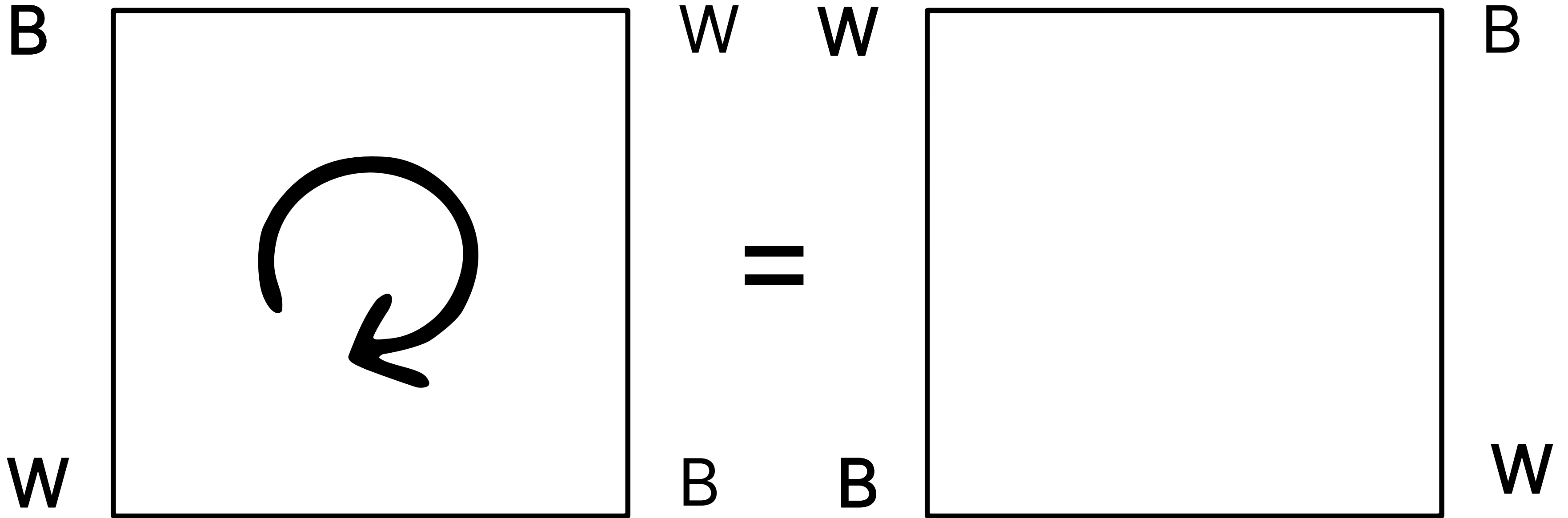
경우의 수 = $\frac{16}{4}$

회전을 고려하면 어떻게 될까?



경우의 수 = ~~$\frac{16}{4}$~~

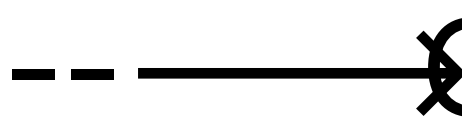
회전을 고려하면 어떻게 될까?



BWBW 는 회전 했을 때 가능한 경우가 2가지 밖에 없다.

6가지는 그냥 셀 수 있는데...

12각형과 3색을 생각하면 경우의 수가 44368개 나온다

바로 알 수는 없을까? --  Group을 이용하면 가능

Group

그룹의 예시로 정수 집합이 있다

$(\mathbb{Z}, +)$

닫혀있다 : $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$

결합법칙 성립 : $(a + b) + c = a + (b + c)$

항등원 존재 : $a + 0 = 0 + a = a$

역원 존재 : $a + (-a) = 0$

Group

결합 법칙 성립

항등원 있음

역원 있음

Group

군을 왜 설명하냐 - ———→ 회전을 모으면 군이 됨

정 n 각형에서 한 칸 회전을 r 이라 하자. 그러면 가능한 회전은

$$C_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \quad \text{이 된다.} \quad r^n = e$$

이 집합에 연산은 합성을 주면

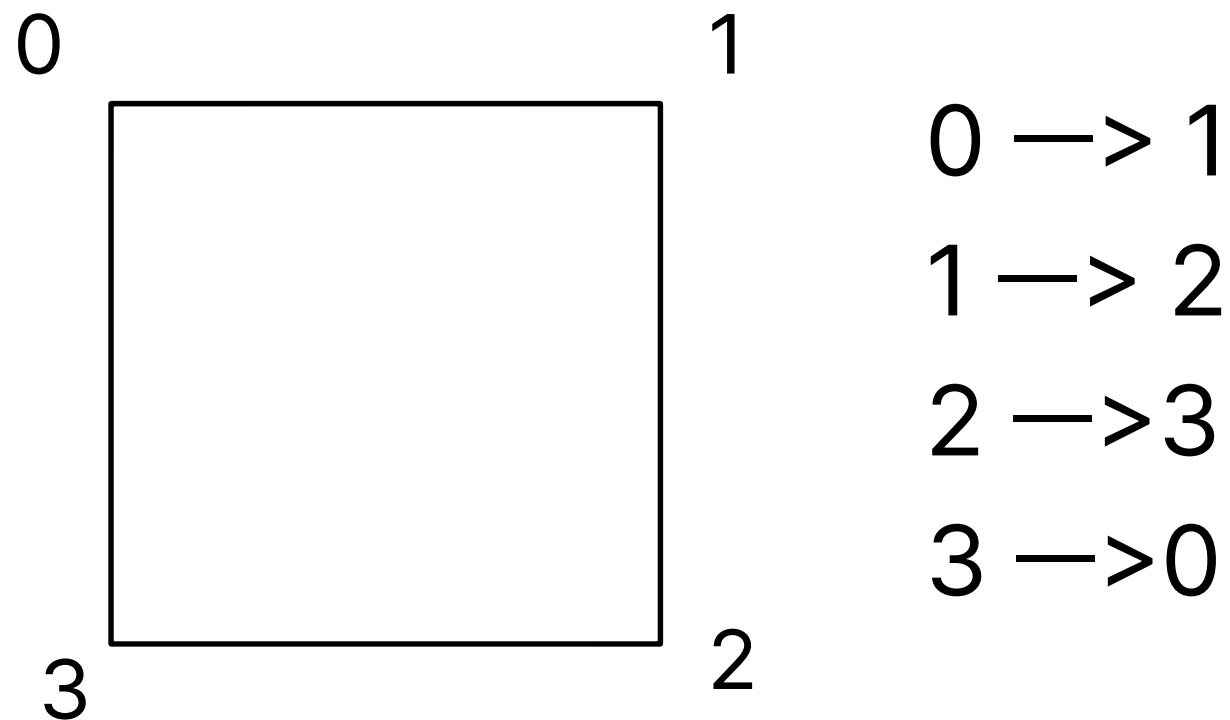
Group

군을 왜 설명하냐 - ———> 회전을 모으면 군이 됨

정 n각형에서 한 칸 회전을 r 이라 하자. 그러면 가능한 회전은

$$C_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \text{ 이 된다 } r^n = e$$

이 집합에 연산은 합성을 주면



$$\frac{360^\circ}{n}$$

Group

1. 닫혀있다

두 회전을 연속해서 해도 하나의 회전이 된다.

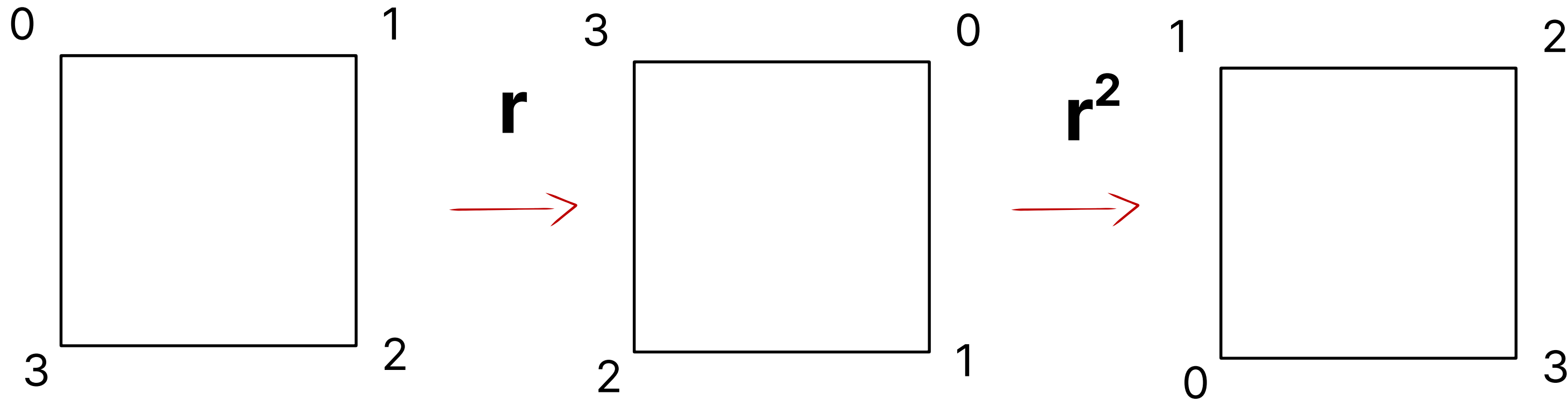
$$r^a \circ r^b = r^{a+b \pmod n} \in C_n$$

Group

1. 닫혀있다

두 회전을 연속해서 해도 하나의 회전이 된다.

$$r^3 \in C_4$$

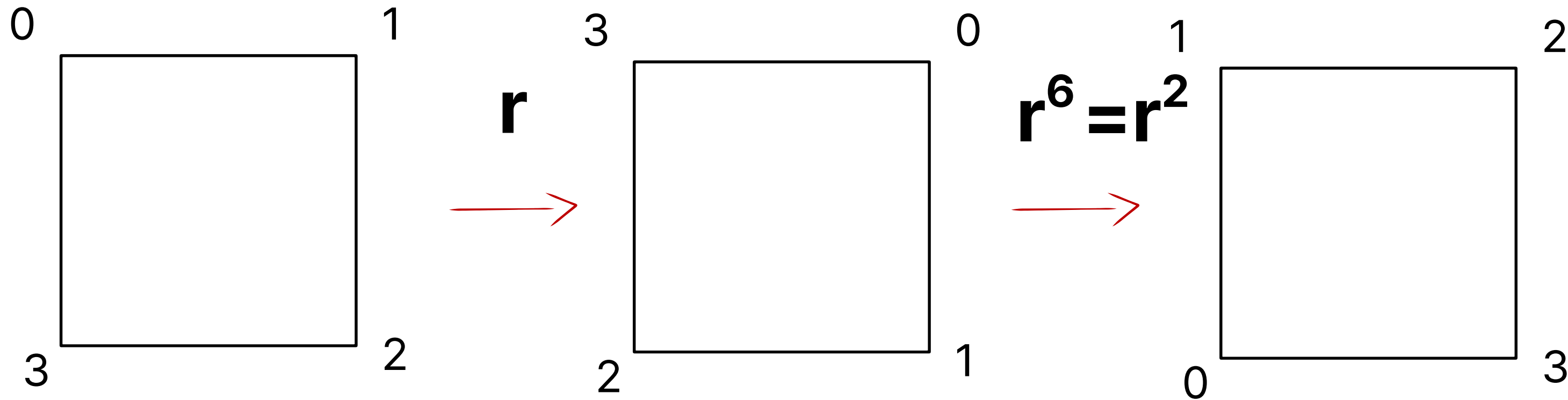


Group

1. 닫혀있다

두 회전을 연속해서 해도 하나의 회전이 된다.

$$r^7 = r^3 \in C_4$$



Group

2. 결합법칙 성립

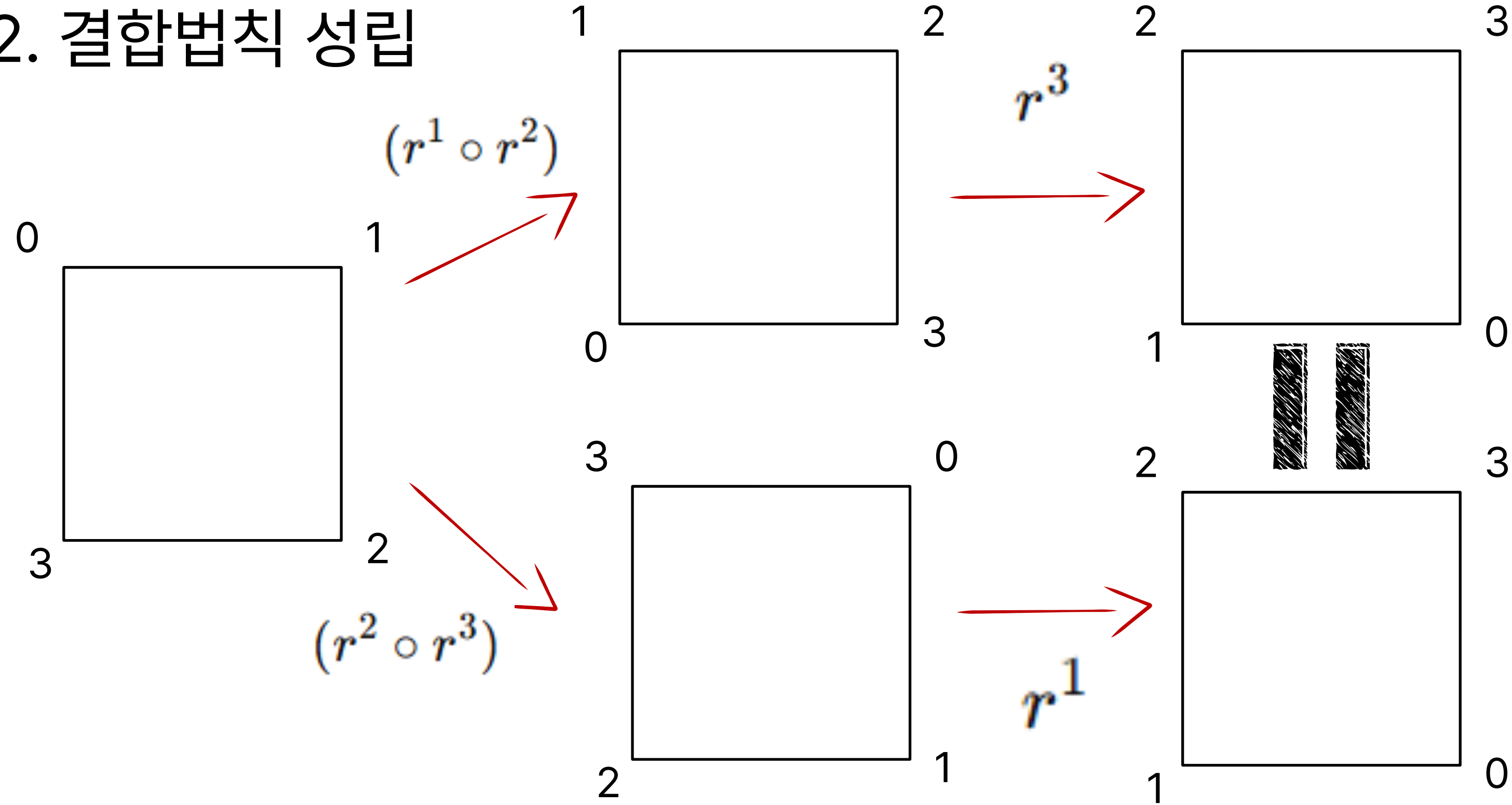
함수의 합성은 항상 결합법칙을 만족시킨다.

$$(r^a \circ r^b) \circ r^c = r^a \circ (r^b \circ r^c)$$

Group

$$(r^1 \circ r^2) \circ r^3 = r^1 \circ (r^2 \circ r^3)$$

2. 결합법칙 성립



Group

3. 항등원 존재

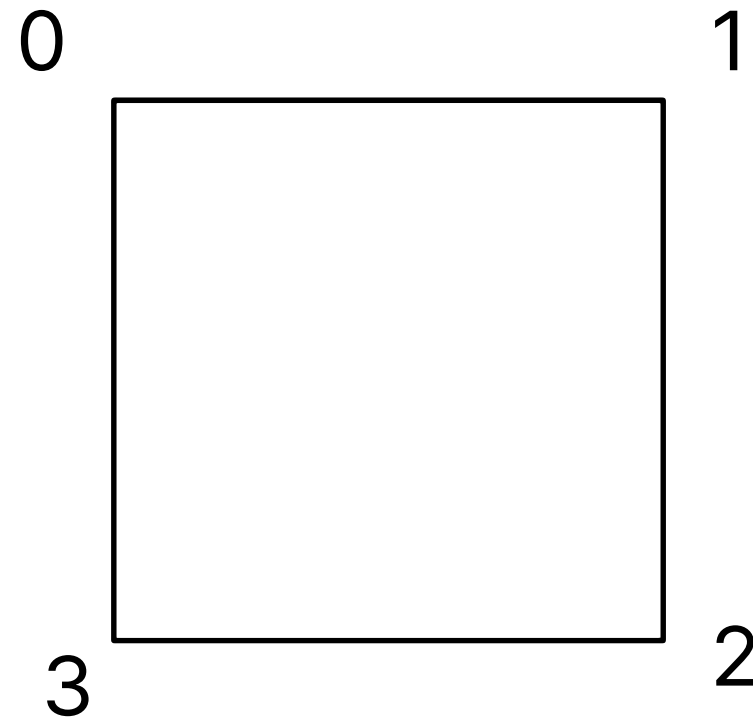
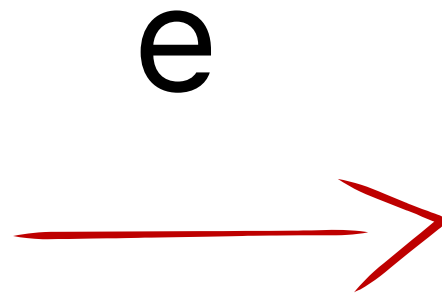
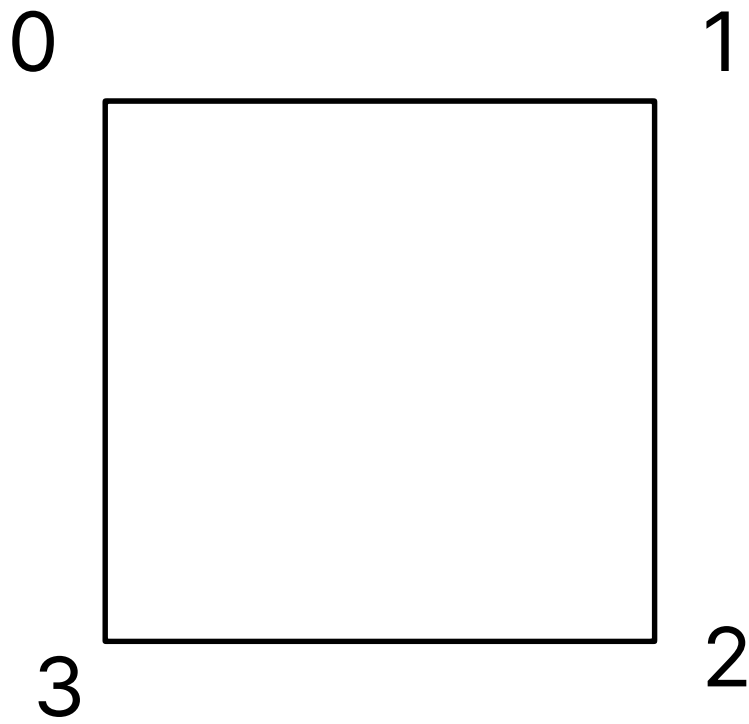
아무것도 하지 않는 회전 e 가 존재한다.

$$e \circ r^a = r^a \circ e = r^a$$

Group

3. 항등원 존재

아무것도 하지 않는 회전 e 가 존재한다.



Group

4. 역원 존재

회전 끼리 연산해서 항등원을 만들 수 있다.

$$r^a \circ r^{n-a} = r^n = e$$

Group

4. 역원 존재

회전 끼리 연산해서 항등원을 만들 수 있다.

$$r^a \circ r^{n-a} = r^n = e$$

따라서 회전들을 모은 집합은 군이다.

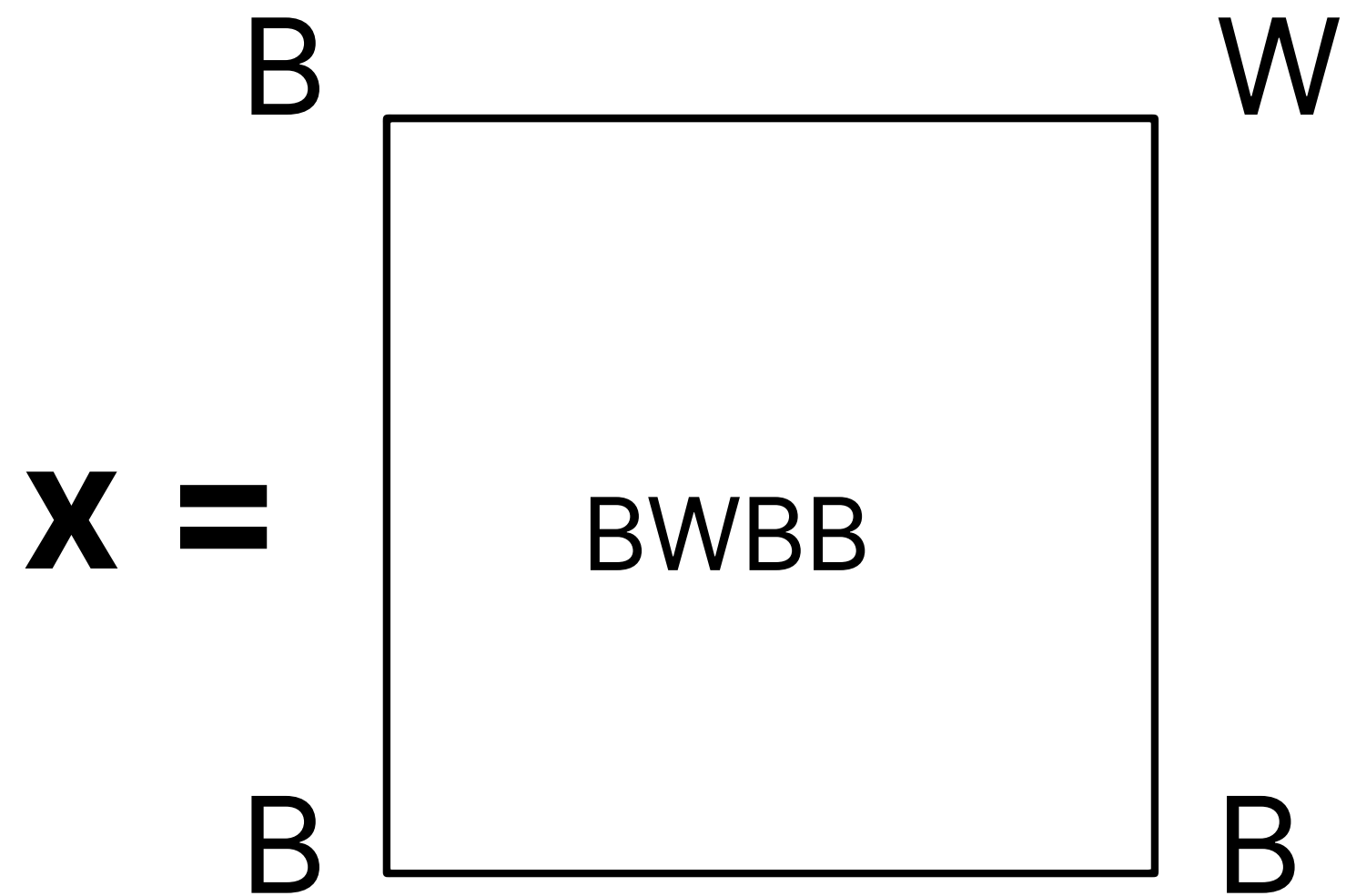
Group

회전하는 함수 정의

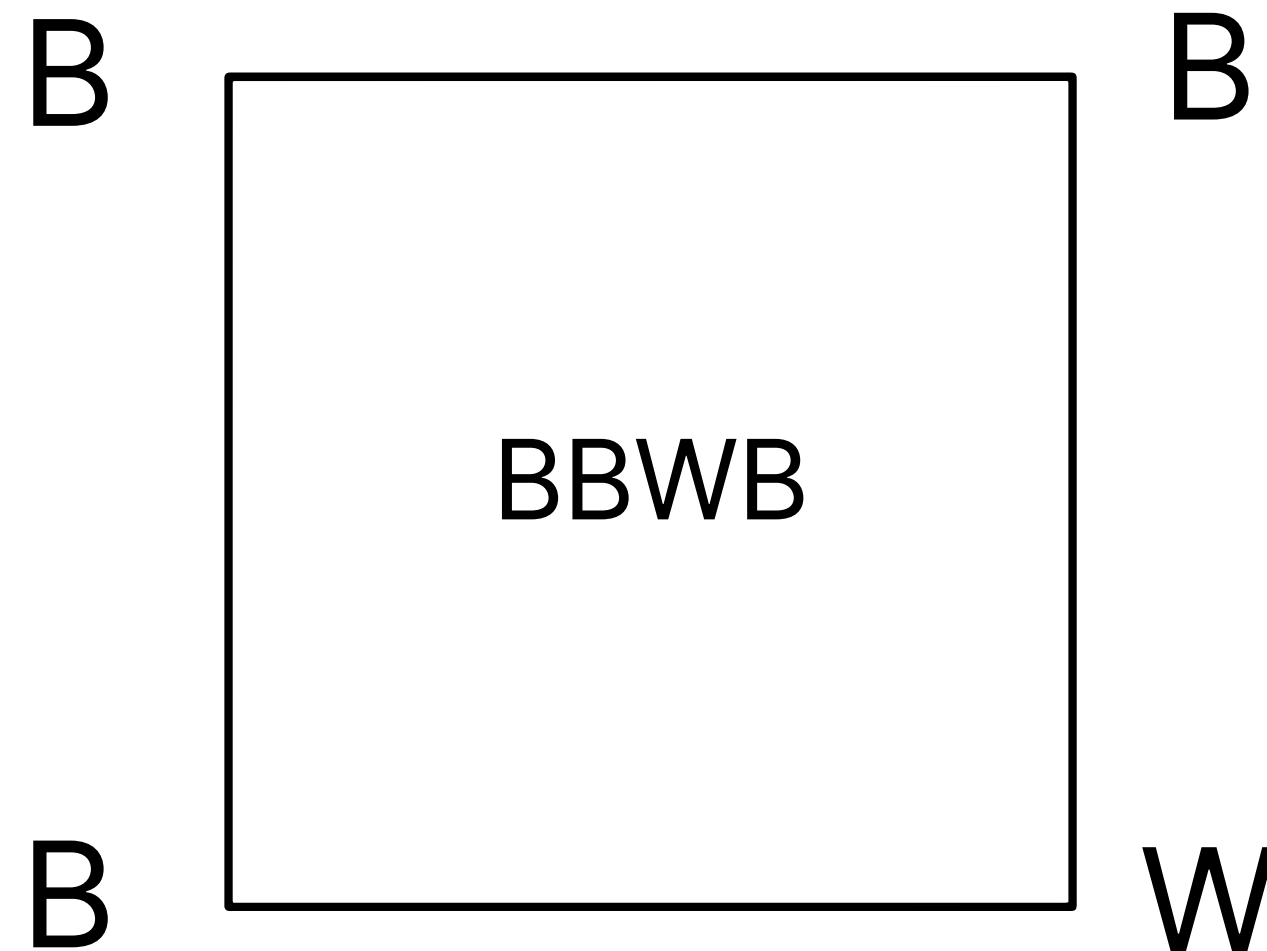
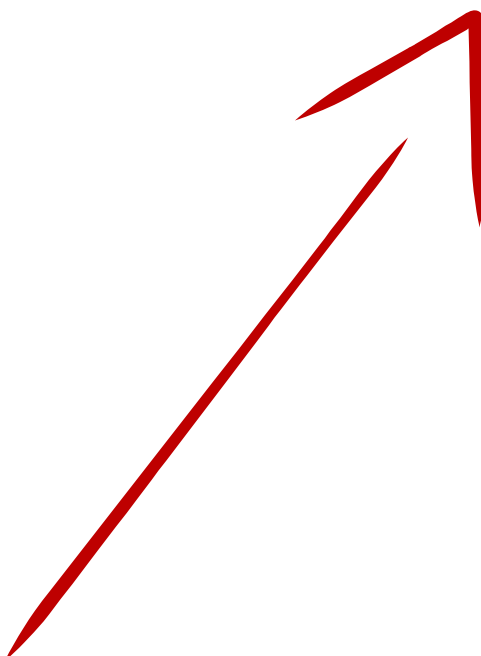
$$f_g : X \rightarrow X, \quad f_g(x) = g * x \quad g \in G$$

회전

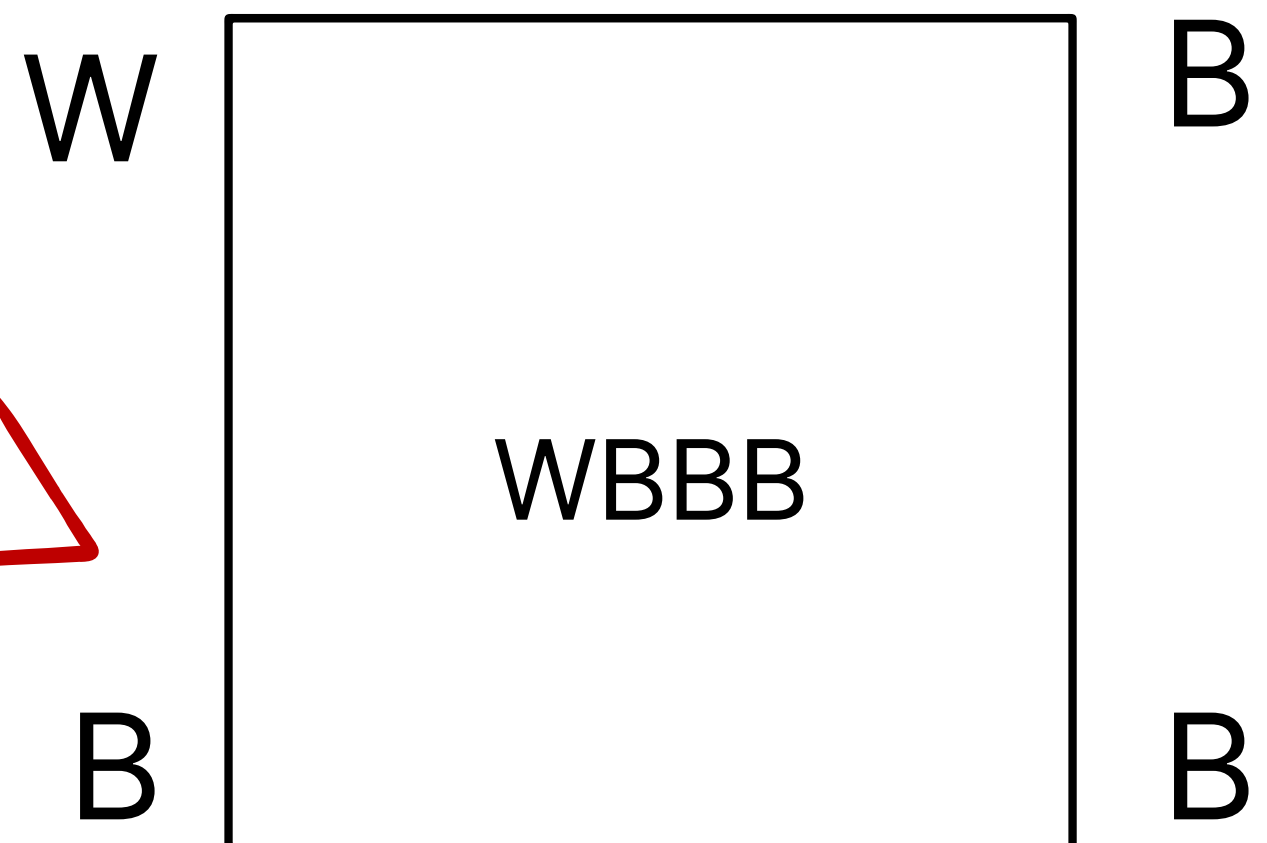
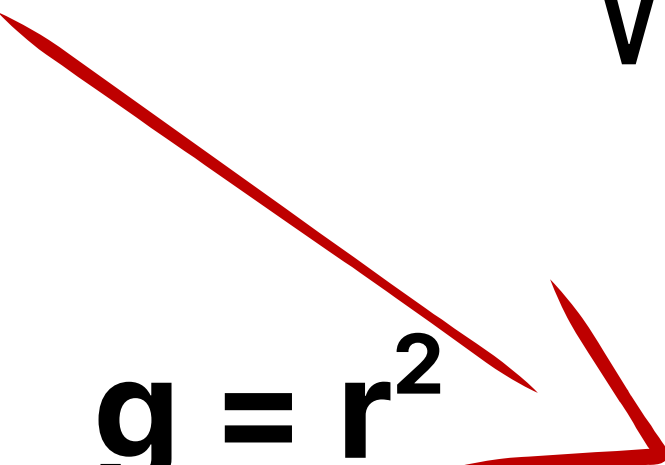
EX)



$$g = r$$



$$g = r^2$$



Group

For a group G acting on a set X , the orbit $\text{Orb}(x)$ of $x \in X$

$$\text{Orb}(x) = \{g * x, g \in G\}.$$

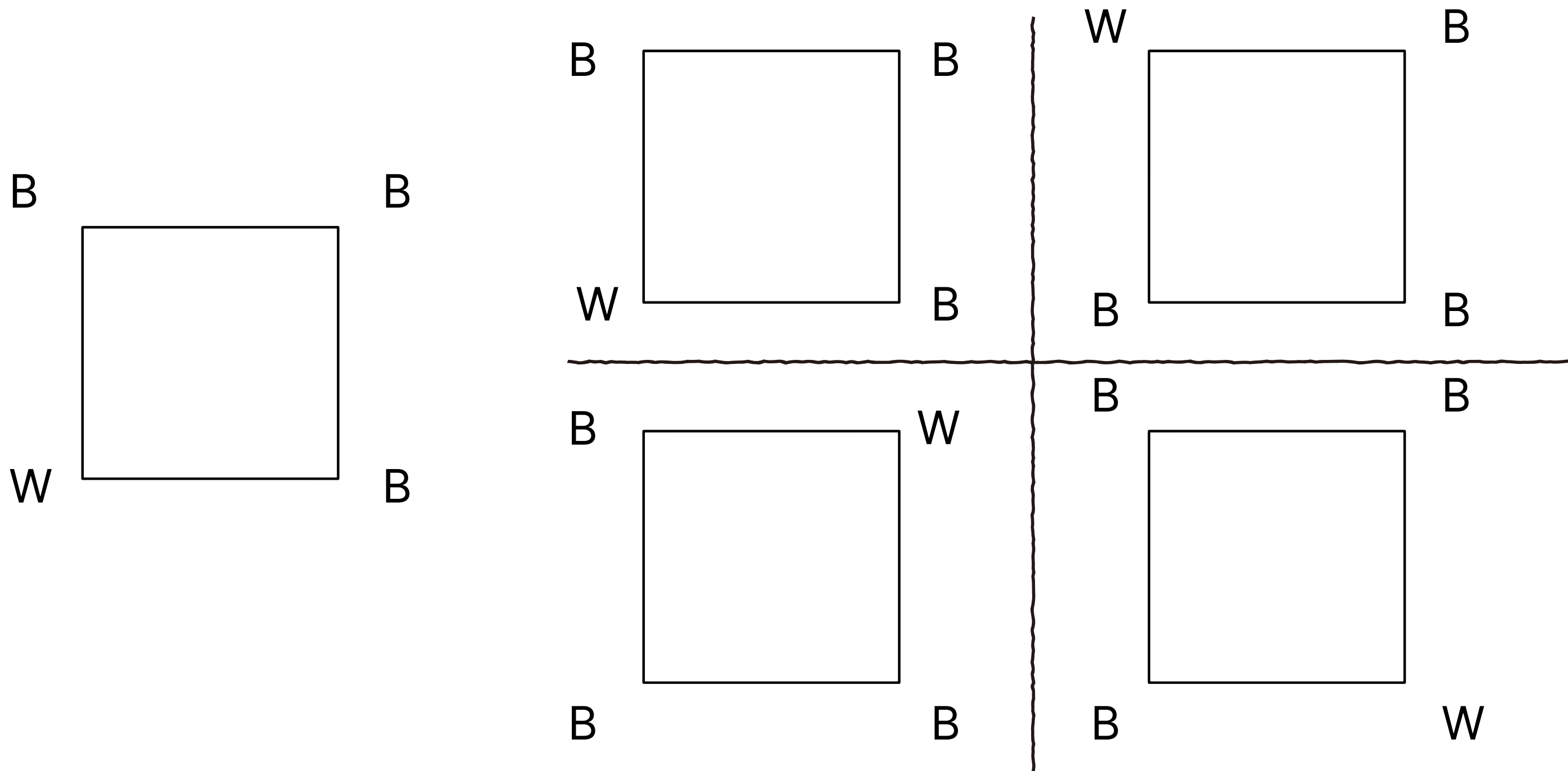
하나의 원소에 대해 회전한 모든 상태를 모아놓은 집합

$$X/G = \{\text{Orb}(x), x \in X\}.$$

Orbit들의 집합

Group

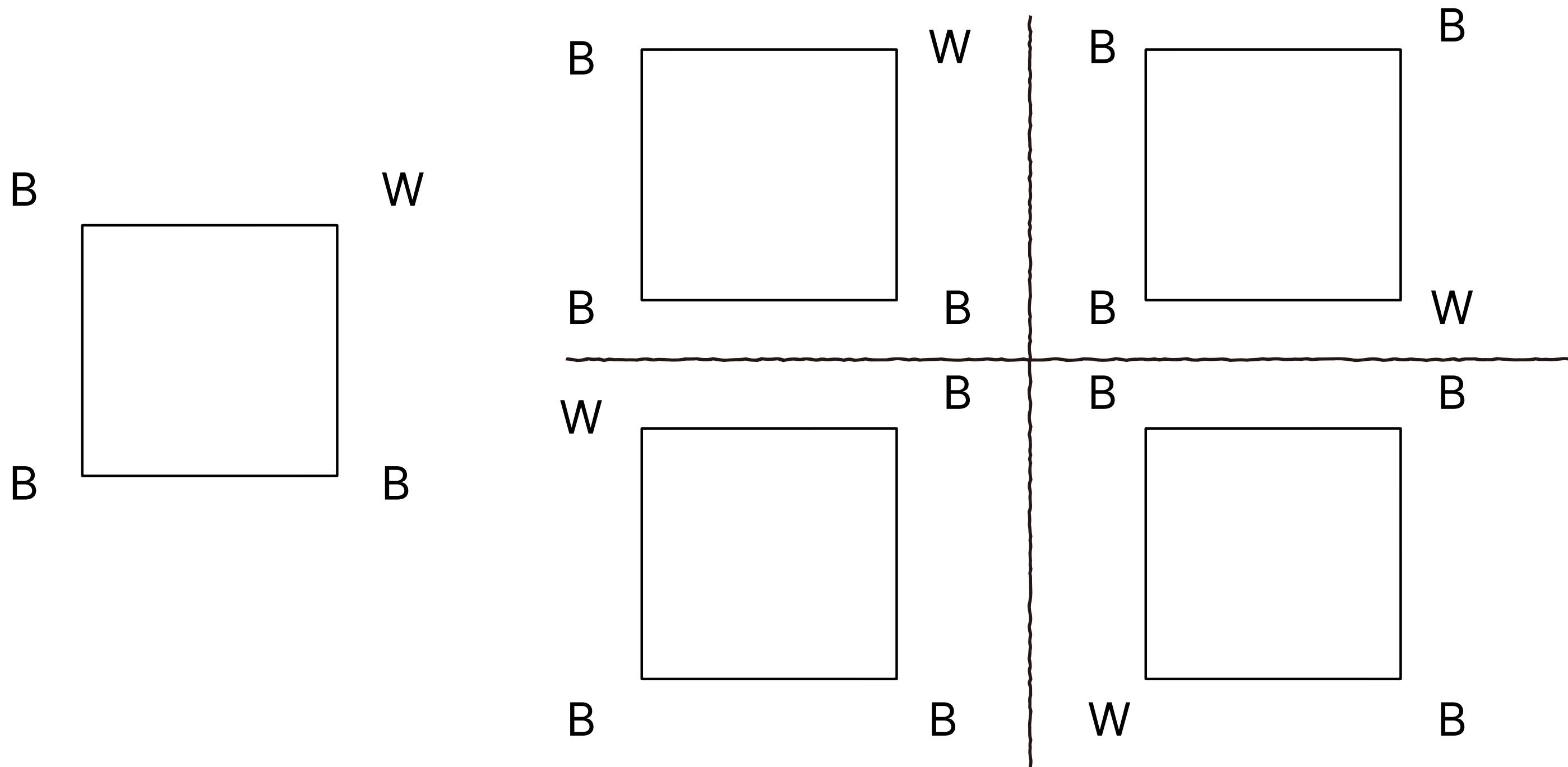
$$\text{Orb}(BBBW) = \{BBBW, WBBB, BWBB, BBWB\}$$



Group

Orbit 을 왜 정의 하나 ————— 하나의 원소에 대해 회전 한 것들을 모을 수 있다

$$\text{Orb}(BBBW) = \{BBBW, WBBB, BWBB, BBWB\}$$



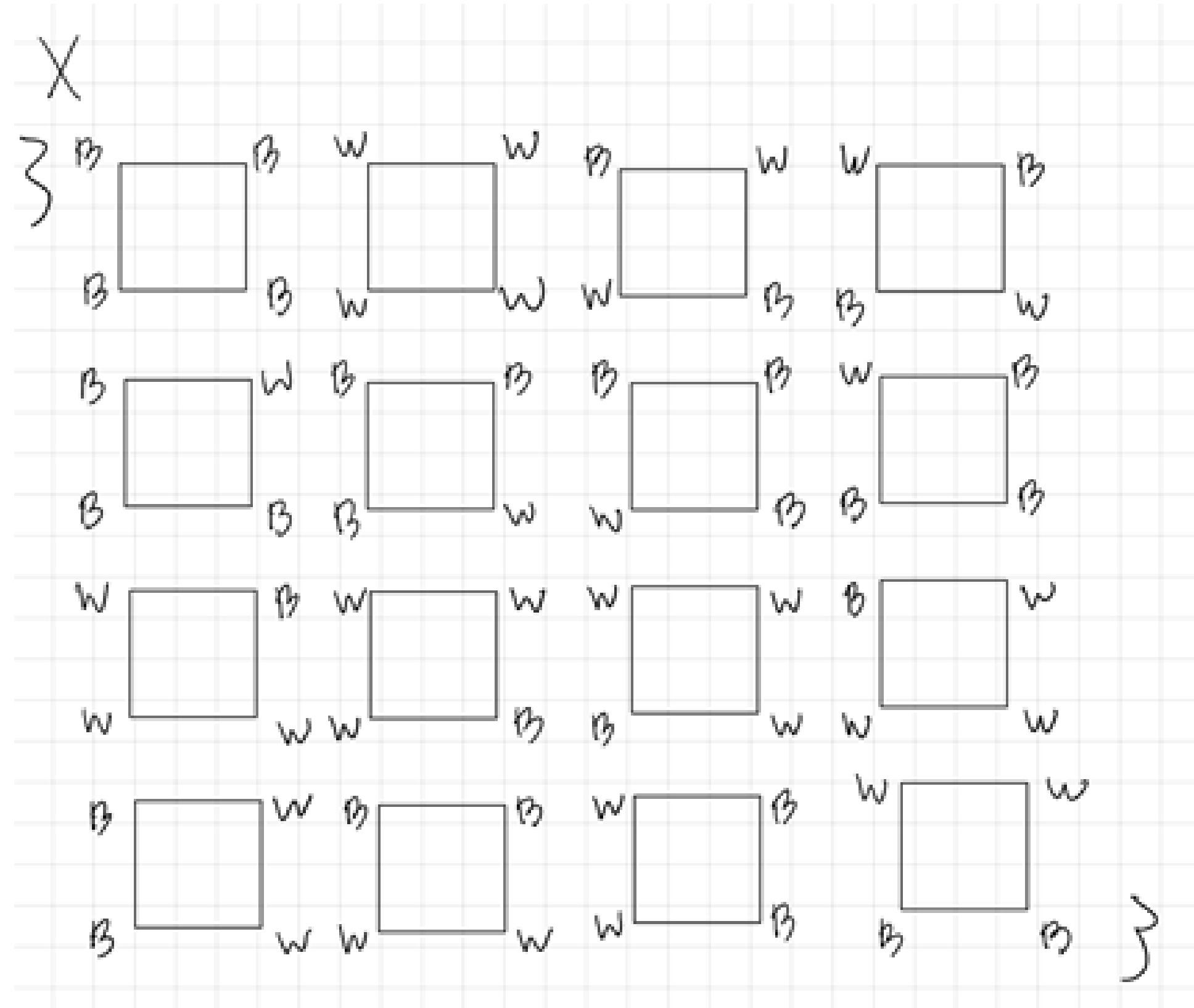
Group

Lemma

Orbits under the action of the group G partition the set X .

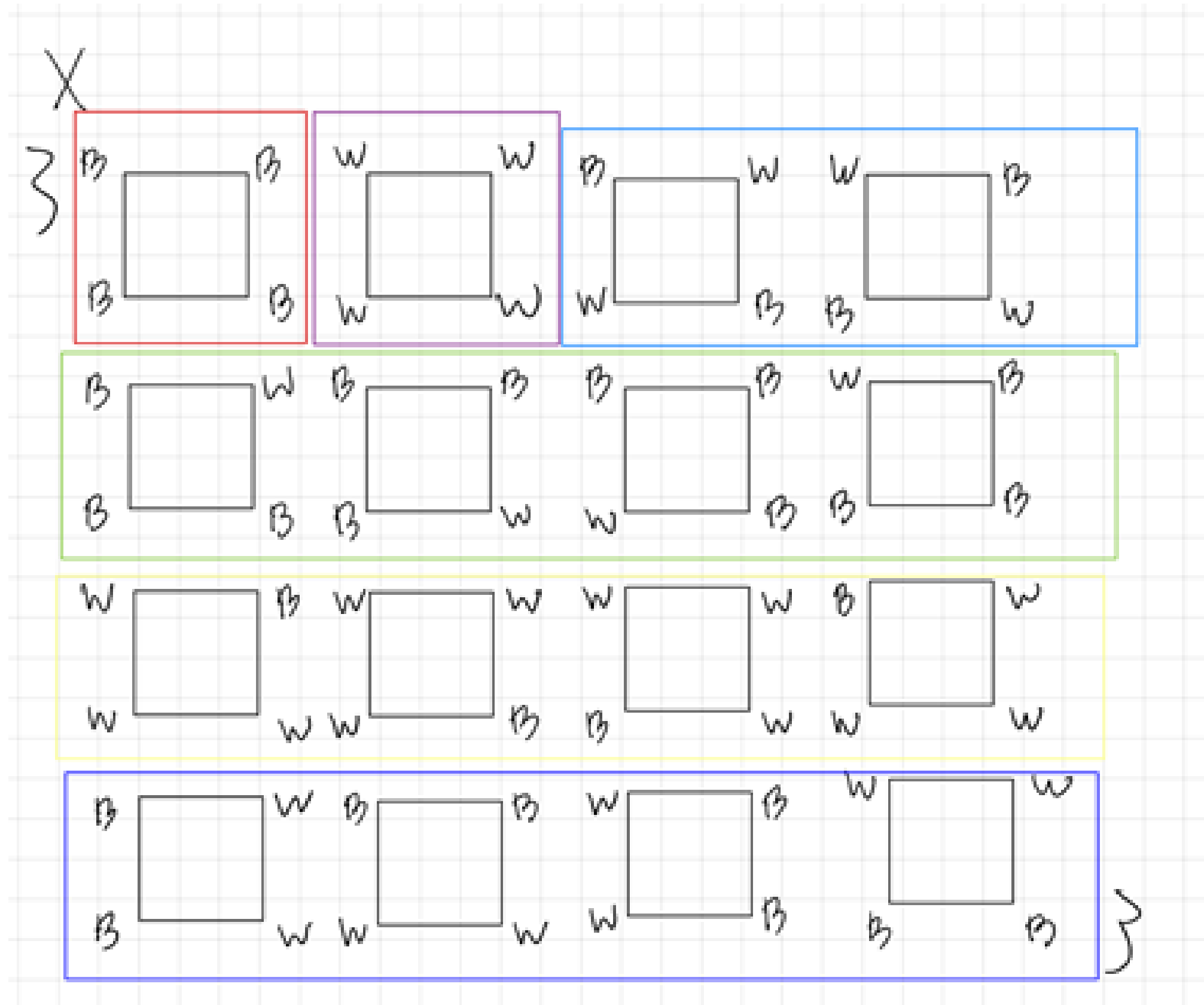
Group

정사각형의 꼭짓점을 흑/백으로 칠하는 모든 경우의수 16가지



Group

orbit 별로 묶어보면 partition 한다는 것을 알 수 있다.



Idea

Lemma $\longrightarrow$ Orbit 개수 = 회전을 고려한 모든 경우의 수

Burnside Lemma

orbit 개수

회전을 해도 안바뀌는 x의 집합

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|, \quad \text{Fix}(g) = \{x \in X, g * x = x\}.$$

회전군 개수

proof

$$A = \{(g, x) \in G \times X : g * x = x\}$$

이 집합의 원소의 개수를 두가지 방식으로 세보자

proof

$$A = \{(g, x) \in G \times X : g * x = x\}$$

이 집합의 원소의 개수를 두가지 방식으로 세보자

1. g 기준으로 세기

2. x 기준으로 세기

proof

case 1)

(g,x) 의 순서쌍을 세는 것과 g를 고정시켜놓고 x의 개수를 세는 것은 같
으니까

$$|A| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

proof

case 2)

orbit 당 A를 만족시키는 회전의 개수는 n개로 같다

Ex)

	$BBBB$	$\{BWWW, WBWW, WWBW, WWWB\}$	$\{BWBW, WBWB\}$
A	$(e, BBBB)$	$(e, BWWW)$	$(e, BWBW)$
	$(r, BBBB)$	$(e, WBWW)$	$(e, WBWB)$
	$(r^2, BBBB)$	$(e, WWBW)$	$(r^2, BWBW)$
	$(r^3, BBBB)$	$(e, WWWB)$	$(r^2, WBWB)$

proof

case 2)

따라서 A 의 개수는 Orbit의 개수에 회전군 원소의 개수를 곱한 것과 같다

$$|A| = |G| \cdot |X/G|$$

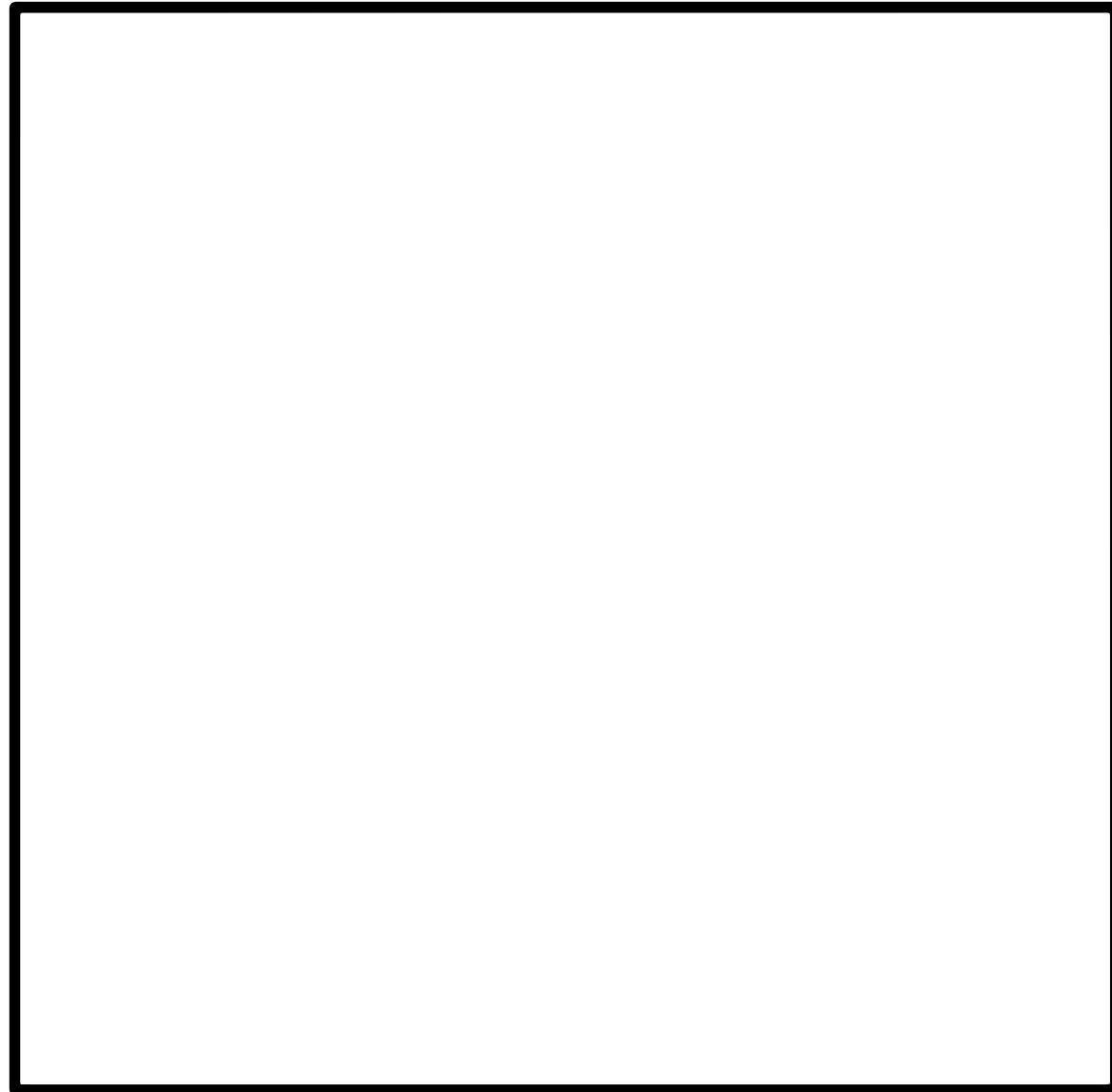
proof

case1, case2를 같다고 놓으면

$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = |G| \cdot |X/G|$$

$$\longrightarrow |X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Example



이 경우의 대하여 Burnside Lemma 를 사용하면

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X, g * x = x\}$$

$$|\text{Fix}(e)| = 16$$

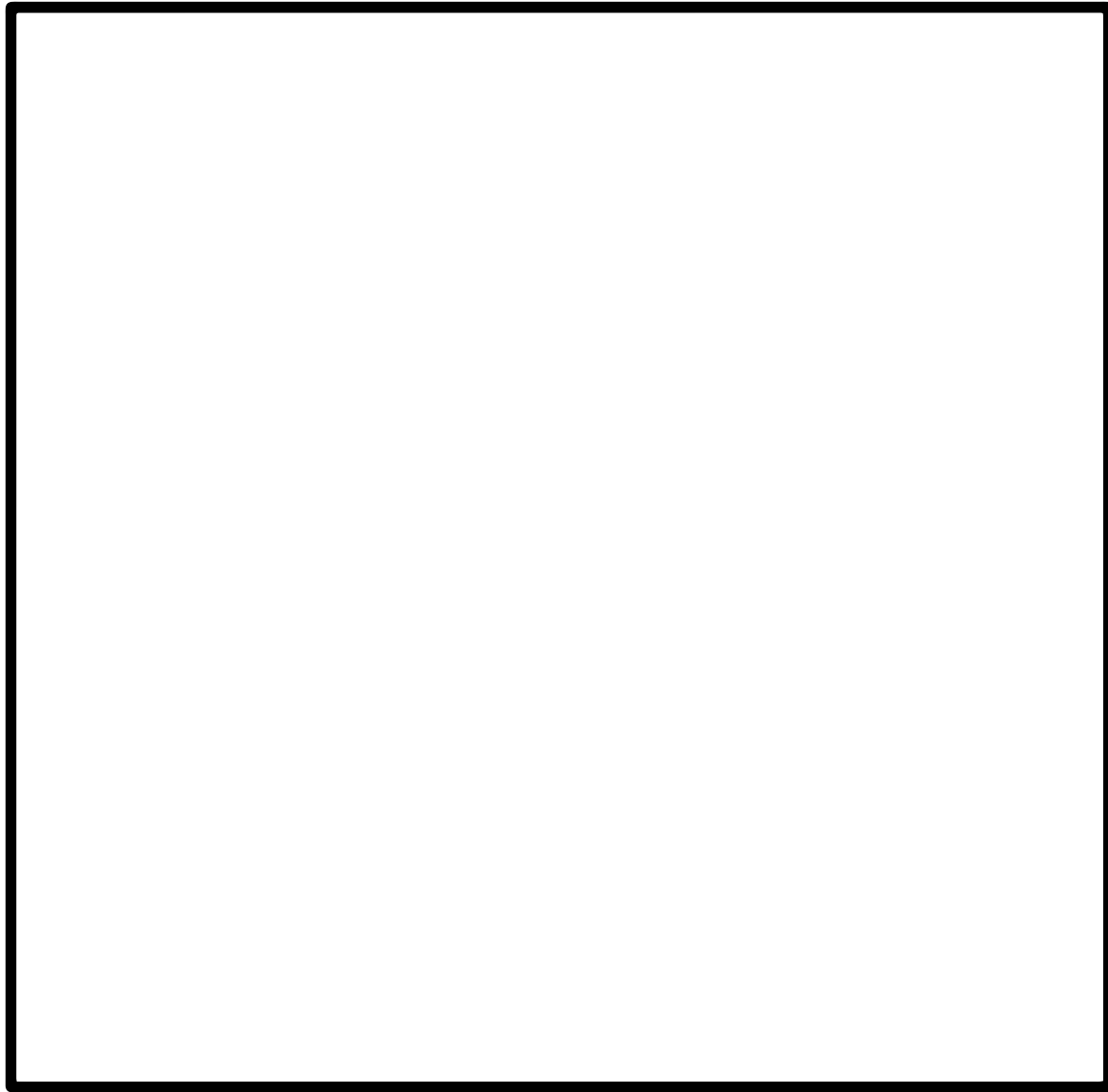
$$|\text{Fix}(r)| = 2 \quad |\text{Fix}(r^3)| = 2$$

한 칸 회전한게 같으려면 모든 색이 다 같아야한다

$$|\text{Fix}(r^2)| = 4$$

{BBBB, BWBW, WBWB, WWWW}

Example



$$| \text{Fix}(g) | = 24$$



$$| G | = 4$$

$$= 6$$

Example

정 12각형의 꼭짓점을 3가지 색으로 칠하는 경우

Burnside Lemma 를 쓰면 $|X/C_{12}| = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} |\text{Fix}(r^j)|$

1칸 회전 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow 11 \rightarrow 0$ 모든 꼭짓점이 같은색 — $|\text{Fix}(r^1)| = 3$

2칸 회전 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 1$ $|\text{Fix}(r^2)| = 3^2 = 9$

3칸 회전 $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 2$ $|\text{Fix}(r^3)| = 3^3 = 27$

Example

이런 cycle의 개수는 $\gcd(12,j)$ 만큼 생긴다.

$$\longrightarrow |\text{Fix}(r^j)| = 3^{\gcd(12,j)}$$

Example

이런 사이클의 개수는 $\gcd(12, j)$ 만큼 생긴다.

$$\longrightarrow |\text{Fix}(r^j)| = 3^{\gcd(12, j)}$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\gcd(12, j)$	12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1

$$|\text{Fix}(q)| = 3^{12} + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3 + 3^6 + 3 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3$$
$$= 532416$$

Example

$$|X/C_{12}| = \frac{532416}{12}$$
$$= 44368$$